Laut Proposition 4.2.9 und Lemma 4.2.8 gilt

$$\begin{aligned}\det A &= \det T_1 \cdots \det T_k \\ &= \widetilde{\det} T_1 \cdots \widetilde{\det} T_k = \widetilde{\det}(A),\end{aligned} \tag{4.1}$$

daher gilt $\det = \widetilde{\det}$. □

Bemerkung 4.2.11. Wir haben willkürlich gewählt, die Theorie der Determinante über Zeilenoperationen zu entwickeln [10]. Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass $\det(A) = \det(A^T)$ ist, was auch zeigt, dass die analogen Aussagen aller obigen Aussagen auch für Spalten gelten. Die Leser sollten sich daher merken, dass es äussert nützlich ist, sowohl Zeilen- als auch Spaltenumformungen in der Berechnung einer Determinante zu benutzen.

4.3 Existenz der Determinante

Es gibt zumindest zwei Wege die Existenz der Determinante zu zeigen. Einer davon ist es, eine induktive Definition zu benutzen mittels dem Entwicklungssatz von Laplace, welchen wir später sehen werden (vgl. Prop. 4.5 in [12]). Der zweite Weg benutzt Permutationen. Da induktive Definitionen nie erleuchtend sind, gehen wir den zweiten Weg.

Um diesen Text nicht noch länger zu machen, erklären wir jetzt nicht, wieso uns Permutationen eigentlich aufgezwungen werden durch die vorherigen abstrakten Definitionen (der Determinante), wenn wir die Existenz der Determinante zeigen wollen. Die interessierten Leser können den Dozenten in der Nachbesprechungszeit fragen und versuchen folgende Übung zu lösen:

Übung 4.3.1. Zeigen Sie nur unter Verwendung von ((D1)-(D3) und vielleicht (D6)), dass

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

die einzige Funktion ist, die (D1)-(D3) erfüllt.

Hinweis: Für eine Funktion Φ, die (D1)-(D3) erfüllt, betrachten Sie $\Phi\left(\begin{pmatrix} ae_1 + be_2 \\ ce_1 + de_2 \end{pmatrix}\right)$.

4.3.1 Permutationen

Sei $S_n = \mathrm{Abb}(\{1, \dots, n\})$. Das heisst, S_n ist die Gruppe aller bijektiven Funktionen von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst mit der Verkettung als Verknüpfung. Die Elemente von

[10] Eigentlich nicht ganz willkürlich: so kann man diesen Stoff auch in Fischer nachlesen.

S_n heissen *Permutationen* (von $\{1,\ldots,n\}$). Wir benutzen die folgende Schreibweise: Für $\sigma \in S_n$ schreiben wir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Per Definition der Multiplikation als Verkettung gilt für alle $\sigma, \tau \in S_n$

$$\begin{aligned} \tau \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau\sigma(1) & \tau\sigma(2) & \cdots & \tau\sigma(n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Erinnern Sie sich daran, dass die Permutation

$$\mathrm{Id} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

das neutrale Element von S_n ist, und dass die Inverse σ^{-1} die Umkehrfunktion von σ ist. Einige Elemente spielen eine spezielle Rolle:

Definition 4.3.2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren das Element $\sigma_{i,j} \in S_n$ als die Permutation, die i und j vertauscht, und sonst nichts ändert. Das heisst

$$\sigma_{i,j}(k) := \begin{cases} j, & \text{falls } k = i \\ i, & \text{falls } k = j \\ k, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ein Element von S_n, das von der Form $\sigma_{i,j}$ ist, nennen wir eine *Transposition.*

Lemma 4.3.3. *Sei $\tau \in S_n$ mit $\tau(1) = i$ und $\tau(2) = j$. Dann gilt $\tau\sigma_{1,2}\tau^{-1} = \sigma_{i,j}$.*

Beweis. Wir berechnen: Für $k \notin \{i,j\}$ ist $\tau^{-1}(k) \notin \{1,2\}$ und daher ist

$$\sigma_{1,2}(\tau^{-1}(k)) = \tau^{-1}(k)$$

beziehungsweise $\tau(\sigma_{1,2}(\tau^{-1}(k))) = \tau(\tau^{-1}(k)) = k$. Für i und j gilt

$$\begin{aligned} \tau\sigma_{1,2}\tau^{-1}(i) &= \tau(\sigma_{1,2}(1)) = \tau(2) = j \\ \tau\sigma_{1,2}\tau^{-1}(j) &= \tau(\sigma_{1,2}(2)) = \tau(1) = i \end{aligned}$$

und das Lemma folgt. □

Beispiel 4.3.4. Die Gruppe S_1 ist ziemlich langweilig. Sie hat nur ein Element $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 4.3.5. Die Gruppe S_2 ist nicht viel interessanter, hat aber zumindest eine Transposition

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_{1,2} \right\}$$

Beispiel 4.3.6. Jede Transposition hat Ordnung zwei. Das heisst, für jedes $\sigma_{i,j} \in S_n$ gilt

$$(\sigma_{i,j})^2 := \sigma_{i,j} \cdot \sigma_{i,j} = \sigma_{i,j} \circ \sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet auch, dass $(\sigma_{i,j})^{-1} = \sigma_{i,j}$. Bemerken Sie ausserdem, dass $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$.

Beispiel 4.3.7. Die Gruppe S_3 ist schon interessanter. Wir schreiben alle ihre Elemente auf:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{1,3} \cdot \sigma_{1,2} = \sigma_{1,2} \cdot \sigma_{2,3} \qquad (\star) \\
\sigma \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_{1,2} \cdot \sigma_{1,3} \\
\tau &:= \sigma_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_{2,1} \\
\tau \cdot \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_{2,3} = \sigma_{3,2} \\
\sigma \cdot \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{3,1} = \sigma_{1,3}.
\end{aligned}$$

Es gibt keine anderen Elemente in S_3 (Wieso?). Ausserdem kann man sich als Beispiel merken, dass

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\sigma_{1,2}\sigma^{-1} = \sigma_{2,3}$$

aus Lemma 4.3.3 folgt, was man auch direkt berechnen kann.

Hier sind zwei Aussagen, die aus dem Obigen folgen:

- S_3 ist nicht-abelsch, da $\tau\sigma \neq \sigma\tau$ ist.
- Jedes Element von S_3 ist entweder eine Transposition oder ein Produkt von Transpositionen (aber nicht auf eine eindeutige Weise wie zum Beispiel $(\star)$ zeigt).

Die beiden letzten Aussagen werden wir verallgemeinern. Die erste zu verallgemeinern ist sehr einfach:

Übung 4.3.8. Benutzen Sie, dass S_3 nicht-abelsch ist, um zu zeigen, dass S_n für $n \geq 3$ nicht-abelsch ist.

4.3.2 Signum einer Permutation

Definition 4.3.9. Sei $\sigma \in S_n$. Ein *Fehlstand*[11] von σ ist ein Paar $i < j$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass

$$\sigma(i) > \sigma(j).$$

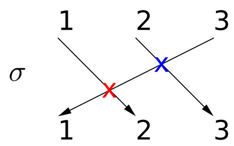
Beispiel 4.3.10. Falls $n = 3$ ist, gibt es drei mögliche Paare mit $i < j$ in $\{1, 2, 3\}$, nämlich $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Zwei davon sind Fehlstände für die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}:$$

- Für $1 < 2$ ist $\sigma(1) = 2 < 3 = \sigma(2)$. Also ist $(1, 2)$ kein Fehlstand.
- Für $1 < 3$ ist $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(3)$. Also ist $(1, 3)$ ein Fehlstand.
- Für $2 < 3$ ist $\sigma(2) = 3 > \sigma(3) = 1$. Also ist $(2, 3)$ ein Fehlstand.

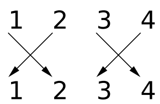
Man sagt: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ hat zwei Fehlstände.

Dies könnte man versuchen zu veranschaulichen:



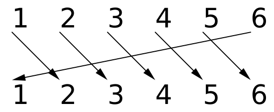
Das blaue Kreuz entspricht dem Fehlstand $(2, 3)$ und das rote Kreuz entspricht dem Fehlstand $(1, 3)$. Man überprüft, wie viele Überkreuzungen es gibt. Jede Überkreuzung entspricht einem Fehlstand.

Beispiel 4.3.11. (1) Die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ hat zwei Fehlstände:



[11] Inversion auf Englisch.

(2) Die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ hat fünf Fehlstände:



(3) Ähnlich hat die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ genau $n-1$ Fehlstände.

Beispiel 4.3.12. Die Transposition $\sigma_{1,2} \in S_n$ hat nur $(1,2)$ als Fehlstand. (Wieso?)

Definition 4.3.13. Wir definieren das *Signum* einer Permutation $\sigma \in S_n$ als[12]

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\sigma) &= \begin{cases} +1, & \text{falls } \sigma \text{ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat} \\ -1, & \text{falls } \sigma \text{ eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat} \end{cases} \\ &= (-1)^k, \end{aligned}$$

wobei k die Anzahl der Fehlstände von σ ist. Eine Permutation σ heisst *gerade*, falls $\operatorname{sign}(\sigma) = +1$ und *ungerade*, falls $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ ist.

Beispiel 4.3.14.

- $\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1.$
- $\operatorname{sign}(\sigma_{1,2}) = (-1)^1 = -1.$
- $\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}.$

Wir werden jetzt die folgenden zwei Lemmata zeigen:

Lemma 4.3.15. *Für $\sigma \in S_n$ gilt*

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i<j}(j-i)}. \tag{4.3}$$

Lemma 4.3.16. *Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt* $\operatorname{sign}(\tau\sigma) = \operatorname{sign}(\tau)\operatorname{sign}(\sigma)$. *In anderen Worten ist*

$$\begin{aligned} S_n &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1,-1\} \\ \sigma &\mapsto \operatorname{sign}(\sigma), \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von S_n nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1,-1\}$.

[12] Viele Autoren schreiben sgn statt sign (inklusive dem Dozenten).

Diese Lemmata und ihre zugehörigen Beweise mögen schwierig erscheinen, sind aber eigentlich elementar. Hier sind einige elementare Beobachtungen, die uns im Beweis von Lemma 4.3.15 helfen:

- Sowohl der Nenner als auch der Zähler in (4.3) enthalten alle möglichen Paare. Im Nenner kommen sie immer in der Form $j - i$ vor, was immer eine positive Zahl ist. Im Zähler hingegen könnte σ das Vorzeichen kehren. Insbesondere ist

$$\frac{\prod_{i<j} |\sigma(j) - \sigma(i)|}{\prod_{i<j}(j - i)} = 1, \tag{4.4}$$

  da alle Faktoren sich miteinander kürzen.

- Genauer gesagt, ändert σ das Vorzeichen im Zähler genau dann, wenn (i, j) ein Fehlstand ist:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} > 0 &\iff (i, j) \text{ ist kein Fehlstand von } \sigma \\ \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} < 0 &\iff (i, j) \text{ ist ein Fehlstand von } \sigma. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir bereit für den Beweis von Lemma 4.3.15. Wir erklären zur Vorbereitung zuerst alle Schritte mit Hilfe der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 4.3.17. Wir überprüfen Lemma 4.3.15 für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\{i < j \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Daher besagt das Lemma, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\sigma) &= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \\ &= \underbrace{\frac{3 - 2}{2 - 1}}_{\text{(1,2) ist kein Fehlstand}} \cdot \underbrace{\frac{1 - 2}{3 - 1}}_{\text{(1,3) ist ein Fehlstand}} \cdot \underbrace{\frac{1 - 3}{3 - 2}}_{\text{(2,3) ist ein Fehlstand}} \\ &\overset{\text{kürzen}}{=} \underbrace{(-1)^2}_{\text{2 ist die Anzahl der Fehlstände}} = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände}}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Beweis ist ganz ähnlich.

Beweis von Lemma 4.3.15. Sei $\sigma \in S_n$. Für $i < j$ gilt:

$$(i, j) \text{ ist ein Fehlstand} \iff \sigma(j) - \sigma(i) < 0.$$

Sei s die Anzahl der Fehlstände von σ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} &= \prod_{\substack{i<j,\\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \cdot \left((-1)^s \prod_{\substack{i<j,\\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \frac{|\sigma(j) - \sigma(i)|}{j - i} \right) \\ &= (-1)^s \prod_{i<j} \frac{|\sigma(j) - \sigma(i)|}{j - i} = (-1)^s,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus (4.4) folgt. □

Für den Beweis von Lemma 4.3.16 benutzen wir Lemma 4.3.15:

Beweis von Lemma 4.3.16. Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(\tau\sigma) &\overset{\text{Lemma 4.3.15}}{=} \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\ &\overset{\text{Lemma 4.3.15}}{=} \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}}_{(*)} \operatorname{sign}(\sigma).\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $(*) = \operatorname{sign}(\tau)$. Machen Sie an diesem Punkt eine Pause und überzeugen Sie sich davon, dass es tatsächlich genügt, $(*) = \operatorname{sign}(\tau)$ zu zeigen.

Es gilt

$$\begin{aligned}(*) &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \\ &= \prod_{\substack{i<j,\\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j,\\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \underbrace{\frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}}_{(\star)}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Betrachten Sie nun genau den Term $(\star)$. Was passiert, wenn wir i mit j vertauschen und j mit i? Nichts passiert, da wir sowohl den Nenner und als auch den Zähler einfach mit -1 multiplizieren. Das sagt uns, dass wir die Rollen von i und j einfach vertauschen können im zweiten Produkt, ohne dass sich etwas ändert. Also ist

$$\prod_{\substack{i<j,\\ \sigma(i)>\sigma(j)}} (\star) = \prod_{\substack{j<i,\\ \sigma(j)>\sigma(i)}} (\star).$$

Wenn wir das in (4.5) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
(*) &= \prod_{\substack{i<j,\\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{j<i,\\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\
&= \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \\
&\overset{\widetilde{i}:=\sigma(i),\widetilde{j}:=\sigma(j)}{=} \prod_{\widetilde{i}<\widetilde{j}} \frac{\tau(\widetilde{j})-\tau(\widetilde{i})}{\widetilde{j}-\widetilde{i}} \\
&\overset{\text{Lemma 4.3.15}}{=} \operatorname{sign}(\tau).
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis des Lemmas. □

Korollar 4.3.18. *Für alle* $\sigma \in S_n$ *gilt* $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$.

Beweis. Nach Lemma 4.3.16 gilt $1 = \operatorname{sign}(\mathrm{Id}) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma^{-1})$, also ist

$$\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sign}(\sigma))^{-1} = \operatorname{sign}(\sigma).$$

□

Korollar 4.3.19. *Für jedes* $i \neq j$ *gilt* $\operatorname{sign}(\sigma_{i,j}) = -1$.

Beweis. Aus Beispiel 4.3.14 wissen wir, dass $\operatorname{sign}(\sigma_{1,2}) = -1$. Sei nun $\tau \in S_n$ mit $\tau(1) = i$ und $\tau(2) = j$. Laut Lemma 4.3.3 wissen wir, dass

$$\tau\sigma_{1,2}\tau^{-1} = \sigma_{i,j}.$$

Daher ist

$$\operatorname{sign}(\sigma_{i,j}) = \operatorname{sign}(\tau)\operatorname{sign}(\sigma_{1,2})\operatorname{sign}(\tau^{-1}) \overset{\text{Korollar 4.3.18}}{=} \operatorname{sign}(\sigma_{1,2}) = -1.$$

Das Korollar folgt. □

Korollar 4.3.20. *Es gilt:*

(1) Die Abbildung $\operatorname{sign}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ *ist surjektiv, falls* $n \geq 2$.

(2) Die Menge $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\} = \{$*alle geraden Permutationen*$\}$ *ist eine Untergruppe von* S_n.

(3) Für jede Transposition[13] $\tau \in S_n$ *gilt*

$$\begin{aligned} A_n\tau &:= \{\sigma\tau \mid \sigma \in A_n\} \\ &= \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = -1\} \\ &= \{\textit{alle ungeraden Permutationen}\} \\ &= S_n \setminus A_n. \end{aligned}$$

(4) Ausserdem gilt $|A_n| = |A_n\tau| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$.

Beweis. (1) Es gilt zum Beispiel, dass $\operatorname{sign}(\mathrm{Id}) = 1$ und $\operatorname{sign}(\sigma_{1,2}) = -1$. Also ist die Abbildung sign surjektiv.

(2) Da wir diese Aussage nicht brauchen werden, überlassen wir diesen Beweis dem Leser als Übung. Erinnern Sie sich daran, dass A_n eine Untergruppe ist, wenn $\mathrm{Id} \in A_n$ ist, und wenn A_n abgeschlossen ist bezüglich Multiplikation und Inverse.

(3) Sei τ eine Transposition. Bemerken Sie zuerst, dass

$$\begin{aligned} A_n &\to A_n\tau \\ \sigma &\mapsto \sigma\tau \end{aligned} \tag{4.6}$$

eine Bijektion ist, da die Funktion $\eta \mapsto \eta\tau^{-1}$ ihre Umkehrfunktion ist. Wir behaupten des Weiteren, dass $A_n\tau$ die Menge aller ungeraden Permutationen ist:

- Jede Permutation der Form $\sigma\tau$ für $\sigma \in A_n$ erfüllt

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau) = +1 \cdot (-1) = -1.$$

- Falls η Signum $\operatorname{sign}(\eta) = -1$ hat, dann ist

$$\operatorname{sign}(\eta\tau^{-1}) = \operatorname{sign}(\eta)\operatorname{sign}(\tau^{-1}) = -1 \cdot (-1) = 1,$$

  wobei wir benutzt haben, dass $\operatorname{sign}(\tau^{-1}) = \operatorname{sign}(\tau) = -1$. Also ist $\eta\tau^{-1} \in A_n$ und daher ist

$$\eta = (\eta\tau^{-1})\tau \in A_n\tau.$$

(4) Da (4.6) eine Bijektion ist, folgt $|A_n| = |A_n\tau|$. Des Weiteren folgt, dass

$$n! = |S_n| = |A_n \sqcup A_n\tau| = |A_n| + |A_n\tau|,$$

was (4) impliziert (Wieso die erste Gleichheit gilt, überlassen wir den Lesern).

□

[13] Eigentlich gilt es sogar für jede ungerade Permutation.

Wir sind jetzt bereit, die Existenz der Determinante zu zeigen.

4.3.3 Existenz

Wir haben bereits die Eindeutigkeit der Determinante gezeigt. Wenn man die Eindeutigkeit direkt zeigen möchte (siehe auch Übung 4.3.1 für den Fall $n = 2$), dann führt dies zur Betrachtung des folgenden Ausdrucks:

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &:= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Das mag auf den ersten Blick vielleicht furchteinflössend wirken. Schauen wir uns also konkrete Formeln für $n = 2, 3$ an. Danach werden wir zeigen, dass Definition die (4.7) tatsächlich (D1)-(D3) erfüllt, was dann auch die Existenz der Determinante zeigt.

Beispiel 4.3.21 ($n = 2$)**.** Es gilt, dass $S_2 = \left\{ \mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Daher ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \operatorname{sign}(\mathrm{Id}) a_{11} a_{22} + \operatorname{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

Beispiel 4.3.22. Unter Benutzung von Beispiel 4.3.7 erinnern wir uns an alle Elemente von S_3 und ihre jeweiligen Signums:

$$\begin{aligned} A_3 &= \left\{ \mathrm{Id}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ S_3 \setminus A_3 &= \left\{ \tau = \mathrm{Id}\, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$