

Serie 1 - Tipps

Empfehlungen. Aufgrund ihrer Bedeutung für das Verständnis, ihres Lernwerts und ihrer Relevanz für die Prüfung empfehle ich, die folgenden Aufgaben in dieser Priorität zu bearbeiten:

$$3 > 2 > 6 > 5 > 1 > 4$$

Die Schwierigkeit der Aufgaben wird jeweils durch die Kreise angegeben.

Aufgabe 1 ●○○○○

-

Aufgabe 2 ●●○○○

Finde alle Untergruppen und zeige dann, dass es keine weitere geben kann, indem du mit dem minimalen Element der Gruppe einen Widerspruch erzielst.

Aufgabe 3 ●●○○○

Sehr wichtige Aufgabe. Sie ist relativ straightforward, braucht also keine verrückten Ideen sondern es geht mehr drum, mit den Definitionen zu arbeiten.

a) -

b) -

c) Wir können auf eine Gruppe G mit der Untergruppe H eine Äquivalenzrelation $\sim$ konstruieren, welche definiert ist durch

$$a \sim b \iff \exists h \in H \text{ s.t. } ah = b.$$

Wir definieren dann eine *Linksnebenklasse* aH für ein $a \in G$ als die Menge

$$\{b \in G \mid b \sim a\} = \{ah \mid h \in H\},$$

d.h. die Menge aller Gruppenelemente, die in dieser Relation zu a stehen.

Im ersten Teil der Aufgabe **fixieren wir eine Nebenklasse**, d.h. wir lassen k fix und betrachten die Abbildung $f : H \rightarrow kH$. Indem du Bijektivität zeigst, folgt dann $|kH| = |H|$ für ein beliebiges $k \in G$.

Im zweiten Teil der Aufgabe bist du **an der Menge der Nebenklassen** interessiert, d.h. du betrachtest die Menge aller möglichen Nebenklassen $\{kH \mid k \in G\}$ und zeigst, dass jedes Element von G in *genau einer* dieser Nebenklassen enthalten ist.

d) Vergiss nicht, Wohldefiniertheit zu zeigen! Bemerke, dass du bei a) gezeigt hast, dass der Stabilisator eine Untergruppe ist und du somit c) verwenden darfst.

e) Mit c) indem du H klug definierst.

Aufgabe 4 ●●●●○



Das gute ist, ihr müsst keine Ahnung mehr haben, wie das Tensorprodukt konstruiert wurde und sogar die charakteristische Eigenschaft ist egal, ihr müsst nur wissen, wie man die Tensoren handhabt. Da Tensoren später eine wichtige Rolle spielen werden in dieser Vorlesung, werde ich zu gegebener Zeit einen kleinen Crashkurs in Tensoren machen.

Zuerst ein paar Erinnerungen aus der Linearen Algebra (vgl. Menny Skript)

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2) \otimes v &= u_1 \otimes v + u_2 \otimes v, & (\alpha u) \otimes v &= \alpha(u \otimes v), \\ u \otimes (v_1 + v_2) &= u \otimes v_1 + u \otimes v_2, & u \otimes (\alpha v) &= \alpha(u \otimes v). \end{aligned}$$

Für das wedge-Produkt gilt zusätzlich noch $(\otimes = \wedge)$

$$v_{\sigma(1)} \wedge v_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma) v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$$

d.h. zum Beispiel $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = -v_2 \wedge v_1 \wedge v_3$. Bemerke, dass dies auch sofort impliziert, dass falls zwei Vektoren in diesem wedge Produkt gleich sind, das wedge Produkt gleich 0 ist, denn

$$v_1 \wedge v_1 \wedge v_3 = -v_1 \wedge v_1 \wedge v_3 \implies v_1 \wedge v_1 \wedge v_3 = 0.$$

- a) Schreibe $Ae_j = \sum_{i=1}^N A_{ij}e_i$. Schreibe damit $A \cdot \Omega$ so um, dass du dann sofort die Definition der Determinante

$$\left(\sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) A_{\pi(1)1} \cdots A_{\pi(N)N} \right)$$

ablesen kannst.

- b) Benutze die Rechenregeln für das wedge Produkt.
- c) Sehr mühsame Aufgabe. Die symplektische Gruppe $\text{Sp}(2n)$ wurde in Beispiel 1.1.8 im Skript definiert. Bemerke zuerst (zeige dies), dass

$$\text{Sp}(2n) = \{A \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\} \quad \text{für} \quad J = \begin{pmatrix} J' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J' \end{pmatrix},$$

wobei

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige ausserdem (und benutze das dann), dass

$$\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq 2n} J_{jk} e_j \wedge e_k.$$

Dann beginnt die ewige Rechnung von $A \cdot \omega$, für welche du am Schluss erhalten solltest

$$A \cdot \omega = \sum_{1 \leq a < b \leq 2n} (A J A^T)_{ab} e_a \wedge e_b.$$

Von diesem Resultat ausgehend, hast du relativ schnell die Aufgabe gezeigt.

d) -

Aufgabe 5 ●●○○○

Aufgrund von Satz 1.3.2 weisst du, dass die Gruppe Ordnung 48 hat (nach dieser Aufgabe wirst du die Existenz der Bahnformel schätzen). Gehe durch alle aufgelisteten Symmetrien durch. Du solltest am Schluss $23 + 9 + 1 + 14 + 1 = 48$ erhalten.

Aufgabe 6 ●●○○○

- a) -
- b) -
- c) Schreibe dein Ergebnis als direktes Produkt $G \times D$, wobei G eine Lie Gruppe und D eine diskrete Gruppe ist.
- d) -
- e) wtf ist Fischparkettboden? Eine wirklich lange Aufgabe.
- f) Bahnformel! Wie in Satz 1.3.2.