

Serie 2 - Tipps

Empfehlungen. Aufgrund ihrer Bedeutung für das Verständnis, ihres Lernwerts und ihrer Relevanz für die Prüfung empfehle ich, die folgenden Aufgaben in dieser Priorität zu bearbeiten:

$$5 > 6 > 3 > 2 > 1 > 4$$

Die Schwierigkeit der Aufgaben wird jeweils durch die Kreise angegeben.

Aufgabe 1 ●●●○○

a) -

b) Finde den expliziten Gruppenisomorphismus $\Phi : G \ltimes H \rightarrow G \tilde{\ltimes} H$, der definiert werden sollte als

$$(g, h) \mapsto (g, \boxed{})$$

wobei $\boxed{}$ ein Ausdruck mit ρ, g und h ist.

c) Argumentiere weshalb es reicht, $\text{Stab}(e_1)$ zu bestimmen (benutze die Transitivität der action auf $V \setminus 0$, welche du in a) gezeigt hast). Schreibe dann $\text{Stab}(e_1)$ als Menge von Matrizen, die die Gleichung $Me_1 = e_1$ erfüllen (wie sollte solch eine Matrix aussehen?) und vergiss schliesslich nicht zu zeigen, dass alle Matrizen, die diese Gleichung erfüllen zwingend von der Form sein müssen, die du definiert hast.

d) Zeige mit Induktion

$$|\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k).$$

Aufgabe 2 ●●○○○

Coole Aufgabe.

a) Bemerke/zeige zunächst, dass

$$\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{m \in M} |\text{Stab}_m|$$

und benutze die Bahnformel für die rechte Seite.

b) Definiere zuerst genau was M und G in diesem Beispiel überhaupt sind.

Aufgabe 3 ●○○○○

a) -

b) Der Isomorphismus $\varphi : G/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ wird ziemlich obvious definiert.

c) Mache eine Fallunterscheidung für n gerade und n ungerade.

Aufgabe 4 ●●●○○

- a) Satz 1.2.3 garantiert, dass $U(n)$ zusammenhängend ist. Mit dem Hinweis, dass für ein beliebiges $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ wir schreiben können $A = QR$ mit $Q \in U(n)$, folgt dass das einzige, was du noch zeigen musst, dass jedes R mit der Identität verbindbar ist (zeige zuerst noch mit $A = QR$ weshalb alle Diagonaleinträge in R strikt grösser als 0 sind).
- b) Dasselbe wie in a) für $O(n)$. Hier folgt jedoch zunächst mit den obigen Argumenten, dass $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten hat. Zeige dann, dass es in der Tat zwei gibt, indem du eine Matrix findest die nicht mit der Identität verbindbar ist.

(Mit *verbindbar* meine ich, dass man einen stetigen Weg von Matrix A nach Matrix B finden kann $\rightarrow$ Wegzusammenhang)

Aufgabe 5 ●●○○○

- a) -
- b) Lemma von Schur.

Aufgabe 6 ●●○○○

- a) -
- b) Argumentiere weshalb wir die Zerlegung $V = \text{Ker}(\pi_W) \oplus W$ machen können. Benutze dann aus a) dass $\pi_W \in \text{Hom}_G(V, V)$ um Invarianz zu zeigen.
- c) -