

Serie 3 - Tipps

Empfehlungen. Aufgrund ihrer Bedeutung für das Verständnis, ihres Lernwerts und ihrer Relevanz für die Prüfung empfehle ich, die folgenden Aufgaben in dieser Priorität zu bearbeiten:

$$5 > 3 > 2 > 4$$

Die Schwierigkeit der Aufgaben wird jeweils durch die Kreise angegeben.

Aufgabe 1 ●○○○○

Haben wir in der Übungsstunde zusammen angeschaut.

Aufgabe 2 ●○○○○

Dadurch, dass alle irreduziblen Darstellungen eindimensional sind, wird es deutlich einfach alle irreduziblen Darstellungen zu bestimmen. Gleiche Taktik wie in der Übungsstunde, als wir die irred. eindimensionale Darstellungen der Diedergruppe gefunden haben; hier ist es sogar noch einfacher, da $\rho(s)$ der einzige Freiheitsgrad ist.

Aufgabe 3 ●●●●○

Das Resultat der Aufgabe a) wird enorm wichtig sein in den nächsten paar Kapiteln.

- a) Zuerst zeigst du mit der Definition $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$ dass $\rho_1 \otimes \rho_2$ in der Tat ein Homomorphismus ist.

Um zu zeigen, dass für den Charakter dieser Darstellung gilt

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g) \chi_{\rho_2}(g),$$

musst du zuerst zeigen, dass für zwei Abbildungen $A \in \text{End}(V)$ und $B \in \text{End}(V)$ gilt

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B).$$

Es gibt verschiedene Wege dies zu zeigen; für zwei Matrizen wissen wir, dass für das Tensorprodukt (oder hier das Kronecker Produkt) gilt (vgl. Menny Skript S.430)

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

und aus dem können wir die obige Formel sofort ablesen.

- b) Beachte zuerst hier, dass die Reihenfolge von Verknüpfungen etwas unintuitiv erscheint. Wie bei der regulären Darstellung, welche durch

$$(\rho_{\text{reg}}(g)f)(h) = f(g^{-1}h), \quad f \in C(G), g, h \in G$$

gegeben ist, ist es wichtig zu sehen, dass zwingend g^{-1} sein muss und nicht g . Dies weil im Ausdruck

$$(\rho_{\text{reg}}(g')\rho_{\text{reg}}(g)f)(h)$$

die Darstellung $\rho_{\text{reg}}(g')$ auf die Funktion $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$ operiert, welche durch $f'(h) = (\rho_{\text{reg}}(g)f)(h) = f(g^{-1}h)$ gegeben ist. Das heisst

$$(\rho_{\text{reg}}(g')\rho_{\text{reg}}(g)f)(h) = (\rho_{\text{reg}}(g')f')(h) = f'((g')^{-1}h) = f(g^{-1}(g')^{-1}h) = (\rho_{\text{reg}}(g'g)f)(h).$$

Achte also auf die Reihenfolge des Arguments, wenn du bei dieser Aufgabe die Darstellungseigenschaft zeigst.

Wie in der Aufgabe beschrieben, ist die duale Darstellung ρ_1^* zu $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ definiert als $\rho_1^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$, $(\rho_1^*(g)(f))(v) := f(\rho_1(g)^{-1}v)$ für $f \in V^*$. Zeige nun, dass

$$\phi : V_1^* \otimes V_2 \rightarrow \text{Hom}(V_1, V_2) \quad \alpha \otimes v_2 \mapsto (v_1 \mapsto \alpha(v_1)v_2)$$

ein Isomorphismus von Darstellungen $(\rho_1^* \otimes \rho_2, V_1^* \otimes V_2)$ und $(\rho_{\text{Hom}}, \text{Hom}(V_1, V_2))$ ist. Dadurch folgt aus Skript Satz 3.2 (ii), dass ihre Charaktere dieselben sind du somit sofort aus a) schliessen kannst, was $\chi_{\rho_{\text{Hom}}}(g)$ sein muss. (In der Linearen Algebra II wird normalerweise bewiesen, dass die obige Abbildung ein kanonischer Isomorphismus ist $V_1^* \otimes V_2 \rightarrow \text{Hom}(V_1, V_2)$.) [Bemerke dass wir diesen Schritt über das Tensorprodukt gemacht haben, da wir wegen a) Charaktere von Tensorprodukten gut verstehen].

Im Ausdruck für $\chi_{\rho_{\text{Hom}}}(g)$ wird noch $\chi_{\rho_1^*}$ vorkommen. Zeige, dass für eine Basis $e_1, \dots, e_m$ von V_1 und ihre duale Basis $e_1^*, \dots, e_n^*$ das folgende gilt:

$$\rho_1^*(g)(e_i^*)(e_j) = (\rho_1(g^{-1}))_{ij}.$$

Zeige, dass dann daraus $\chi_{\rho_1^*}(g) = \chi_{\rho_1}(g^{-1})$ folgt.

Aufgabe 4 ●●●○○

- a) -
- b) Am besten bestimmst du dies, indem du die adjungierte Wirkung eines allgemeinen Gruppenelements auf ein anderes, allgemeines Gruppenelement ausprobierst. Mache eine Fallunterscheidung von n gerade und n ungerade. Unten sind die Lösungen in hellem grau.

n gerade:

$$\{1\} \quad \{R^k\} \quad \{R^i, R^{-i}\}_{i \in \{1 \dots k-1\}} \quad \{S, SR^2, \dots, SR^{2k-2}\} \quad \{SR, SR^3, \dots, SR^{2k-1}\}.$$

n ungerade:

$$\{1\} \quad \{R^i, R^{-i}\}_{i \in \{1 \dots k\}} \quad \{S, SR^1, \dots, SR^{2k}\}.$$

- c) Mit Spektralsatz.
- d) Im Hinweis sind die Lösungen bereits geschrieben. Für eine Rotation $R(\phi, \vec{A})$ um die Achse $\vec{A}$ mit Winkel ϕ könnte die folgende Identität noch hilfreich sein:

$$R(\phi, \vec{A})R(\psi, \vec{B})R(-\phi, \vec{A}) = R(\psi, R(\phi, \vec{A})\vec{B})$$

Aufgabe 4 ●●○○○

Alte Prüfungsaufgaben. Löse sie ohne Tipps.