

Serie 5 - Tipps

Empfehlungen. Aufgrund ihrer Bedeutung für das Verständnis, ihres Lernwerts und ihrer Relevanz für die Prüfung empfehle ich, die folgenden Aufgaben in dieser Priorität zu bearbeiten:

$$4 > (3) > 5 > 1 > 2$$

Die Schwierigkeit der Aufgaben wird jeweils durch die Kreise angegeben.

Aufgabe 1 ●●●●○

Für den Anfang eine sehr schwere Aufgabe. Finde zuerst s_λ und a_λ heraus. Du solltest dann

$$c_\lambda = s_\lambda a_\lambda = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \sigma - \sum_{\substack{\nu \in S_n \\ \nu(1)=n}} \nu$$

erhalten. Laut Skript ist die irreduzible Darstellung gegeben durch $\rho_\lambda(\sigma)(v) = \sigma v$, wobei wir ρ_λ auf $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]c_\lambda$ beschränken. Definiere für $j = 1, 2, \dots, n$ die Elemente

$$v_j = \sum_{\sigma(n)=j} \sigma - \sum_{\nu(1)=j} \nu \in \mathbb{C}[S_n]$$

Zeige, dass $\pi(v_j) = v_{\pi(j)}$ für $\pi \in S_n$ und $v_j \in V_\lambda$ (bemerke hierfür, dass $v_n = c_\lambda$ und versuche v_j für j beliebig als v_n zu umschreiben). Danach möchtest du zeigen, dass $(v_j)_{j=2, \dots, n}$ eine Basis von V_λ als $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist. Zeige hierfür:

- $\sum_{j=1}^n v_j = 0$,
- $(v_j)_{j=2, \dots, n}$ ist ein Erzeugendensystem,
- $(v_j)_{j=2, \dots, n}$ sind linear unabhängig.

Um nun zu zeigen, dass die Darstellung von oben äquivalent ist zur bekannten Darstellung von S_n auf $\mathbb{C}^{n-1}$, definiere den Isomorphismus als $e_j \mapsto v_j$ und benutze $\pi(v_j) = v_{\pi(j)}$, um zu argumentieren, weshalb das ein Isomorphismus von Darstellungen ist (teste es auf der Basis).

Aufgabe 2 ●○○○○

Braucht keine Ideen / Kreativität - einfach stur in die Formel einsetzen.

Aufgabe 3 ●●○○○

Wir haben zufälligerweise in der letzten Übungsstunde eine leicht abstraktere Version dieser Aufgabe zusammen gelöst.

Aufgabe 4 ●●○○○

Gute Aufgabe!

- a) Einfach, beachte, dass der Hinweis auf dem Aufgabenblatt eigentlich erst bei der Aufgabe b) stehen sollte.

- b) Geeignete Basis für die entsprechenden Vektorräume benutzen.
- c) Welche Dimension hat die Signumsdarstellung? ($\rightarrow$ so viele Polynome suchst du).
Schreibe zuerst ein allgemeines Polynom von W_3 hin und überlege, wie es aussehen sollte, damit die Darstellung wie die Signumsdarstellung darauf operiert.

Aufgabe 5 ●●○○○

-