Serie 6 - Tipps

Empfehlungen. Aufgrund ihrer Bedeutung für das Verständnis, ihres Lernwerts und ihrer Relevanz für die Prüfung empfehle ich, die folgenden Aufgaben in dieser Priorität zu bearbeiten:

$$4 > 5 > 3 > 2 > 1$$

Die Schwierigkeit der Aufgaben wird jeweils durch die Kreise angegeben.

Aufgabe 1 ●●○○○

Beide Aufgaben lassen sich relativ einfach mit kombinatorischen Überlegungen lösen. Das schwierige ist eher, dies formal zu beweisen.

a) -

b) Definiere die Gruppenwirkung von S_n auf S_n selber durch Konjugation, d.h.

$$\sigma \cdot \tau = \sigma\tau\sigma^{-1}.$$

Die Bahn von τ ist dann gerade die Konjugationsklasse. Benutze die Bahnformel. Für dies musst du $|\mathrm{Stab}_\tau|$ bestimmen.

Aufgabe 2 ●○○○○

a) -

b) Was ist $\mathbb{Z}_n$ für eine Gruppe? Überlege dir lieber intuitiv, wie du Eigenvektoren für alle $\rho(g)$ basteln kannst, statt diese zu berechnen.

c) Achtung, du musst hier *genau dann wenn* zeigen. Am besten schreibst du $\rho(g)Ae_i$ und $A\rho(g)e_i$ hin (mit Matrixeinträgen, d.h. $Ae_i = \sum_j A_{ji}e_j$) und vergleichst beide Seiten.

d) Du solltest bei b) herausgefunden haben, dass in der Zerlegung alle Unterdarstellungen inäquivalent sind (insb. verschiedene Eigenwerte). Kommutierende Matrizen sind simultan diagonalisierbar.

Aufgabe 3 ●●○○○

Resultat der Aufgabe ist sehr wichtig.

a) -

b) Du musst zeigen, dass

$$(\rho \boxtimes \nu)\left((g,h)\left(g',h'\right)\right) = (\rho \boxtimes \nu)(g,h)(\rho \boxtimes \nu)\left(g',h'\right)$$

c) Verwende in deinem Beweis $|G \times H| = |G||H|$ und $\sum_{(g,h)\in G\times H} = \sum_{g\in G}\sum_{h\in H}$.

Aufgabe 4 ●●●○○

a) -

b) Benutze den Hinweis unter der Aufgabe (d.h. die Resultate von Serie 3 Aufgabe 4 und Serie 4 Aufgabe 5). Ausserdem brauchst du alle Resultate von Aufgabe 3 (dieser Serie). Du solltest schliesslich folgende Tabelle erhalten haben:

$48O$	K_1	$8K_2$	$6K_3$	$6K_4$	$3K_5$	$(-K_1)$	$8(-K_2)$	$6(-K_3)$	$6(-K_4)$	$3(-K_5)$
$\chi_{\rho_+\boxtimes\nu_1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{\rho_-\boxtimes\nu_1}$	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
$\chi_{\rho_2\boxtimes\nu_1}$	2	-1	0	0	2	2	-1	0	0	2
$\chi_{\rho_3\boxtimes\nu_1}$	3	0	1	-1	-1	3	0	1	-1	-1
$\chi_{\rho_{3'}\boxtimes\nu_1}$	3	0	-1	1	-1	3	0	-1	1	-1
$\chi_{\rho_+\boxtimes\nu_2}$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
$\chi_{\rho_-\boxtimes\nu_2}$	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_{\rho_2\boxtimes\nu_2}$	2	-1	0	0	2	-2	1	0	0	-2
$\chi_{\rho_3\boxtimes\nu_2}$	3	0	1	-1	-1	-3	0	-1	1	1
$\chi_{\rho_{3'}\boxtimes\nu_2}$	3	0	-1	1	-1	-3	0	1	-1	1

c) Die Herangehensweise ist exakt wie jene aus Kapitel 5.3. Du musst nur $\mathrm{Tr}(R)$ in diesem Kontext bestimmen. Als Charakter solltest du

$48O$	K_1	$8K_2$	$6K_3$	$6K_4$	$3K_5$	$-K_1$	$8(-K_2)$	$6(-K_3)$	$6(-K_4)$	$3(-K_5)$
χ_ρ	24	0	0	0	0	0	0	4	0	0

erhalten.
Mit den Sätzen von Kapitel 5.1 kannst du schliesslich Aussagen über die Eigenfrequenzen machen. Beachte dass nicht alle Eigenfrequenzen Schwingungen ergeben; siehe den Abschnitt, welcher auf S. 44 unten im Skript beginnt.

Aufgabe 5 ●●●○○

a) Definiere die Darstellung

$$\rho' : D_6 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^6), \quad (g, \pm 1) \mapsto \pm\rho(g)$$

wobei ρ die Darstellung ist, welche gegeben ist durch Permutationen der Ecken des regulären n-Ecks. Finde die Zerlegung (der ± 1 Teil wird keinen Unterschied machen) und benutze Satz 5.1.1.

b) Aus dem Kapitel 5.1 vom Skript könnt ihr folgern, dass

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_{++} + I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{-+} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 I_2 \end{pmatrix}$$

sein muss (wir werden das in der Übungsstunde genauer anschauen). Weil $\mathbb{Z}_2$ wieder nichts wichtiges macht, kannst du nun einfach die Projektionen auf die isotypischen Komponenten bzgl. ρ angucken, d.h.

$$p_{\pm+} = \sum_{g \in D_6} \overline{\chi_{\pm+}(g)}\rho(g), \quad p_i = \sum_{g \in D_6} \overline{\chi_i(g)}\rho(g) \quad i = 1, 2$$

benutzen und jeweils e_1 und manchmal e_2 projizieren.

c) Die Eigenvektoren hast du in b) berechnet, nutze diese um die Eigenwerte von H zu bestimmen.
Beachte nun, dass wenn wir den Spin hinzufügen (kannst du nicht wissen, das ist QM) der Hamiltonian zu

$$H \otimes I_{\mathbb{C}^2}$$

wird, $I_{\mathbb{C}^2}$ ist die Identitätsmatrix in $\mathbb{C}_2$. Somit tritt jeder Eigenwert doppelt auf (da $v \otimes e_1$ und $v \otimes e_2$ Eigenvektoren für den gleichen Eigenwert nun sind, wenn v der Eigenvektor von H war; die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner gleich der algebraischen, also hat H in der Tat 2 mal den Eigenwert. Alternativ betrachte einfach die Darstellungsmatrix von $H \otimes I_{\mathbb{C}^2}$). Für die Besetzungszahl des Grundzustandes bräuchtest du ein bisschen QM Wissen. Wenns dich interessiert, frage in der Übungsstunde.