Serie 8 - Tipps

Empfehlungen. Aufgrund ihrer Bedeutung für das Verständnis, ihres Lernwerts und ihrer Relevanz für die Prüfung empfehle ich, die folgenden Aufgaben in dieser Priorität zu bearbeiten:

$$5 > 1 > 2 > 4 > 3$$

Die Schwierigkeit der Aufgaben wird jeweils durch die Kreise angegeben.

Aufgabe 1 ●●●○○

Gleiches Vorgehen wie immer.

a) Für die Namen der Konjugationsklassen, siehe Serie 3, Aufgabe 4d).

b) Für $\mathrm{Tr}(R)$ ist es z.T. hilfreich, eine kluge Basis zu wählen. Für den Charakter von ρ solltest du

$48O$	K_1	$8K_2$	$6K_3$	$6K_4$	$3K_5$	$-K_1$	$8(-K_2)$	$6(-K_3)$	$6(-K_4)$	$3(-K_5)$
χ_ρ	21	0	-1	3	-3	-3	0	3	-1	5

erhalten.

c) -

d) -

e) Benutze Lemma von Schur, wie wir es in der Übungsstunde gesehen haben (i.e. betrachte $D|_U$, für einen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^{21}$).

Aufgabe 2 ●●●○○

a) Aus Serie 7, Aufgabe 2 wissen wir, dass V ein vierdimensionaler, reeller Vektorraum ist. Schreibe α, β usw. in der Form $a + ib$ usw. um und berechne $\mathrm{Tr}(XY^*)/2$. (Du solltest dabei herausfinden, dass dieser bzgl. der Basis $\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ das Standardskalarprodukt ist).

b) Um Wohldefiniertheit zu zeigen, benutze $V = \{\lambda A : \lambda \in \mathbb{R}, A \in SU(2)\}$. Für $\rho(A, B) \in O(V)$, musst du zeigen, dass

$$(\rho(A, B)X, \rho(A, B)Y) = (X, Y).$$

Vergiss nicht schliesslich die Homomorphismuseigenschaft von ρ zu zeigen.

c) Etwas schwer:

- Kern: Ähnlich wie im Skript, benutze $X = \sigma_0, i\sigma_1$ und $i\sigma_3$.
- Surjektivität: Sei $T \in \mathrm{SO}(V)$ beliebig. Argumentiere weshalb $T(\sigma_0) \in \mathrm{SU}(2)$ und schreibe $A = T(\sigma_0)$. Definiere die Abbildung

$$S(X) = \rho(A^{-1}, \sigma_0) \circ T(X), \quad \text{für } X \in V.$$

Zeige, dass $S(\sigma_0) = \sigma_0$ und argumentiere, weshalb S den Unterraum $\mathbb{R}\sigma_0$ und das orthogonale Komplement $V^\perp$ auf sich selber abbildet. Argumentiere, weshalb $S|_{V^\perp} \in \mathrm{SO}(V^\perp) \cong \mathrm{SO}(3)$.
Benutze nun den Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ und die Eigenschaft, dass $S(\sigma_0) = \sigma_0$ um zu zeigen, dass ein $B \in \mathrm{SU}(2)$ existiert, sodass $S(Y) = BYB^*$, für alle $Y \in V$. Schliesse daraus die Surjektivität, indem du $T(Y) = \rho(\boxed{}, \boxed{})Y$ findest.

Aufgabe 3 ●●○○○

a) Verwende die Identitäten

$$\cosh(\chi_1)\cosh(\chi_2) + \sinh(\chi_1)\sinh(\chi_2) = \cosh(\chi_1 + \chi_2)$$
$$\sinh(\chi_1)\cosh(\chi_2) + \cosh(\chi_1)\sinh(\chi_2) = \sinh(\chi_1 + \chi_2)$$

b) Zeige zuerst, dass

$$L(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & \sinh(\chi)e_3^T \\ \sinh(\chi)e_3 & \mathrm{Id}_{3\times 3} + (\cosh(\chi) - 1)e_3e_3^T \end{pmatrix}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen solltest du auf das Resultat

$$L(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & \sinh(\chi)v^T \\ \sinh(\chi)v & \mathrm{Id}_{3\times 3} + (\cosh(\chi) - 1)vv^T \end{pmatrix}$$

kommen.

Aufgabe 4 ●●○○○

a) -

b) Inspiration: Serie 7, Aufgabe 1.

Aufgabe 5 ●●○○○

-