Übung 0: Recap aus Analysis I/II

0.1 Partielle Integration

Mit der Partielle Integration kehrt man die Produktregel der Differentialrechnung um. Die Idee ist folgende: man wandelt ein kompliziertes Integral eines Produktes in einer Summe eines einfacheren Integrals und eine Funktion um. Die allgemeine Formel lautet für unbestimmte Integrale:

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

und für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$$

Beispiel 1. Man löse $\int \ln(x)dx$:

Lsg. Man kann es umschreiben und man bekommt:

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot ln(x) - x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2. Man löst $\int \cos^2(x)dx$

Lsg.

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x)dx &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \sin^2(x)dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int [1 - \cos^2(x)]dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx\end{aligned}$$

Jetzt hat man eine einfache Gleichung: falls man erste und letzte Term berücksichtigt:

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx$$

das heisst

$$2 \cdot \int \cos^2(x)dx = \sin(x) \cdot \cos(x) + x \Longrightarrow \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2} \cdot [x + \sin(x) \cdot \cos(x)] + C,\ C \in \mathbb{R}$$

0.2 Partialbruchzerlegung

Mit der Partialbruchzerlegung versucht man eine schwierige rationale Funktion in einer Summe einfachere Brüche umzuwandeln. Diese Methode ist sehr nützlich z.B. wenn man diese schwierige rationale Funktionen integrieren möchtet. Man macht im Allgemein drei Ansätze, bezüglich den **Nenner** der Funktion:

- einfache Nullstellen (hier x_1 und x_2):

$$\frac{Z(x)}{(x - x_1) \cdot (x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

- Nullstellen mit höherer Vielfachheit (hier x_1):

$$\frac{Z(x)}{(x-x_1)^2\cdot(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2}$$

- komplexe Nullstellen:

$$\frac{Z(x)}{(x^2+x_1)\cdot(x-x_2)} = \frac{A\cdot x+B}{x^2+x_1} + \frac{C}{x-x_2}$$

Bemerkung. Falls der Grad der Zähler $Z(x)$ grösser als der Grad des Nenners ist, man muss zuerst die Polynomdivision durchführen. Ziel der Verfahren ist die Konstanten A, B, C finden um dann das Integral zu lösen.

Beispiel 3. Vereinfachen Sie $\frac{5x^2-2}{x(x+1)^2}$:

Lsg. Grad von Zähler ist 2, Grad von Nenner ist 3, das heisst wir müssen keine Polynomdivision durchführen:

$$\frac{5x^2-2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Es folgt

$$5x^2-2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

Man kann das in ein einfaches LGS mit Koeffizientenvergleich umschreiben:

$$\begin{aligned} A+B&=5\\ 2A+B+C&=0\\ A&=-2 \end{aligned}$$

Das liefert $A=-2$, $B=7$ und $C=-3$ und somit

$$\frac{5x^2-2}{x(x+1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{7}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

0.3 Lineare Differentialgleichungen

Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten $n-$ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0\cdot y = 0$$

können mit dem Ansatz

$$y(x) = C\cdot e^{\lambda\cdot x}$$

gelöst werden. Man kann den Ansatz einsetzen und durch $C\cdot e^{\lambda\cdot x}$ teilen: man erhält das charakteristische Polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Man kann die allgemeine Lösung mit der **Superposition** der einzelnen Lösungen berechnen und man hat drei Fälle:

- verschiedene reelle Nulstellen: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$:

$$y(x) = C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x} + C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x} + \ldots + C_n\cdot e^{\lambda_n\cdot x}$$

- Nullstelle λ_1 mit Vielfachheit k:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + \ldots + C_k \cdot x^{k-1} e^{\lambda_1 \cdot x}$$

- komplex konjugiertes $k-$faches Nullstellenpaar $\lambda_{1,2} = a \pm i \cdot b$:

$$y(x) = e^{a \cdot x} \cdot [A_1 \cdot \cos(bx) + B_1 \cdot \sin(bx)] + \ldots + e^{a \cdot x} \cdot x^{k-1} \cdot [A_k \cdot \cos(bx) + B_k \cdot \sin(bx)]$$

Beispiel 4. Man löse die lineare Differentialgleichung

$$16y''(x - 24y'(x) + 9y(x) = 0$$

Lsg. Mit dem Ansatz folgt einfach das Polynom

$$16\lambda^2 - 24\lambda + 9 = (4\lambda - 3)^2 = 0$$

Es folgt $\lambda_{1,2} = \frac{3}{4}$ und also

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\frac{3}{4}x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\frac{3}{4}x}$$