

Übung 9: D'Alembert und Methode der Charakteristiken

9.1 Methode der Charakteristiken

9.1.1 Idee

Falls man eine PDE lösen muss, kann man dieser Methode, um schneller zu berechnen, benutzen. Die Grundlegende Idee der Methode ist eine Koordinatentransformation durchzuführen, die zur ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen bringt. Man löst die Gleichung in *vereinfachten* Koordinatensystem und man transformiert die Lösung am Ende zurück.

9.1.2 Methode

Startpunkt muss immer die bekannte allgemeine Form der PDE sein:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Aus dieser Form kann man den **Typ** der PDE bestimmen: es wird sehr nützlich das zu wissen am Ende des Verfahrens. Die **charakteristische Gleichung** der PDE lautet

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0$$

wobei die Koeffizienten A, B, C dieselbe der allgemeine Form der PDE sind und $y = y(x)$. Man hat jetzt eine ODE und man löst die auf y' (A, B, C müssen konstant sein!):

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \lambda_{1,2}$$

Da es eine Ableitung erster Ordnung vorkommt, kriegt man zwei verschiedene Lösungen:

$$y_1 = \lambda_1 \cdot x + c_1$$

$$y_2 = \lambda_2 \cdot x + c_2$$

Gegeben (siehe **Theorem 3.10** des Skriptes) $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ als unabhängige Lösungen der charakteristische Gleichung, kann die für c_1 und c_2 lösen:

$$\Phi(x, y) = c_1 = y - \lambda_1 \cdot x$$

$$\Psi(x, y) = c_2 = y - \lambda_2 \cdot x$$

$\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ sind die **Charakteristiken** genannt. Man kann jetzt zwei neue Variablen definieren: die Definition ist für jeden Typ von PDE verschieden, es gilt:

- **Hyperbolisch**

$$v = \Phi(x, y) \quad w = \Psi(x, y)$$

- **Parabolisch**

$$v = x \quad w = \Psi(x, y) = \Phi(x, y)$$

- **Elliptisch**

$$v = \frac{1}{2}(\Psi(x, y) + \Phi(x, y)) \quad w = \frac{1}{2}(\Phi(x, y) - \Psi(x, y))$$

Man kann jetzt die PDE in den neuen Variablen umschreiben und also die **Normalformen** schreiben. Sie lauten:

- **Hyperbolisch**

$$u_{vw} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

- **Parabolisch**

$$u_{vv} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

- **Elliptisch**

$$u_{vv} + u_{ww} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Bemerkung. Wie kann man solche Formen erreichen? Die **Kettenregel** ist hier extrem wichtig. Als Erinnerung, sehr nützliche Ableitungen für $u = v(x, y) \cdot w(x, y)$ sind:

$$u_x = u_v \cdot v_x + u_w \cdot w_x$$

$$u_y = u_v \cdot v_y + u_w \cdot w_y$$

$$u_{xx} = u_{vv} \cdot v_x^2 + u_v \cdot v_{xx} + u_{ww} \cdot w_x^2 + u_w \cdot w_{xx} + 2v_x \cdot w_x \cdot u_{vw}$$

$$u_{yy} = u_{vv} \cdot v_y^2 + u_v \cdot v_{yy} + u_{ww} \cdot w_y^2 + u_w \cdot w_{yy} + 2v_y \cdot w_y \cdot u_{vw}$$

$$u_{xy} = u_{vv} \cdot v_x \cdot v_y + u_v \cdot v_{xy} + u_{ww} \cdot w_x \cdot w_y + u_w \cdot w_{xy} + (v_y \cdot w_x + v_x \cdot w_y) \cdot u_{vw}$$

Man kann jetzt durch zwei Integrationen sehr einfach die Lösung in den Variablen (v, w) berechnen. Am Ende transformiert man die Lösung in den Variablen (x, y) zurück.

9.2 Lösung von D'Alembert

Sei die PDE $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ gegeben. Falls man die Koordinatentransformation

$$v = x + ct$$

$$w = x - ct$$

schreibt, kann man die vorher definierte Ableitungen benutzen. Es folgt

$$u_t = u_v \cdot v_t + u_w \cdot w_t = u_v \cdot c - u_w \cdot c,$$

$$u_x = u_v \cdot v_x + u_w \cdot w_x = u_v + u_w,$$

$$u_{tt} = u_{vv} \cdot v_t \cdot c + u_{vw} \cdot w_t \cdot c - u_{wv} \cdot v_t \cdot c - u_{ww} \cdot w_t \cdot c$$

$$= u_{vv} \cdot c^2 - u_{vw} \cdot c^2 - u_{wv} \cdot c^2 + u_{ww} \cdot c^2$$

$$= u_{vv} \cdot c^2 - 2u_{vw} \cdot c^2 + u_{ww} \cdot c^2,$$

$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}$$

Falls man diese Ergebnisse in der PDE einsetzt, man erhält

$$c^2(u_{vv} - 2u_{vw} + u_{ww}) = c^2(u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww})$$

Man vereinfacht und erreicht

$$u_{vw} = 0$$

Durch zwei Integrationen kann man die Lösung erreichen:

$$u(x, t) = \varphi(v) + \psi(w) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

Für eine normale PDE hat man zusätzlich die zwei Anfangs/Randbedingungen. Falls man die berücksichtigt, erhält man das **Cauchy Problem**:

$$\begin{cases} u(x, t) &= \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{cases}$$

Die Lösung des Problems ist die *D'Alembertsche Lösung* und kann (auch in der Prüfung) direkt als

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Bemerkung. Sieh für eine komplette Herleitung **S.51** des Skriptes.

9.3 Beispiele

Beispiel 1. *Prüfungsaufgabe HS 15* Gegeben sei eine unendliche Saite, welche zur Zeit $t = 0$ horizontal um

$$u(x, 0) = \ln \left(\frac{2 + e^x}{1 + e^{-x}} \right)$$

ausgelenkt werde. Weiter wird angenommen, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei und dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1$ entlang der Saite ausbreiten.

a) Formulieren sie das Problem mathematisch.

Lsg. Man kann hier das Problem mit der eindimensionalen Wellengleichung beschreiben. Der Faktor c ist gegeben und ist $c = 1$; die Anfangsgeschwindigkeit ist gegeben und ist 0. Das heisst

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \ln \left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}} \right) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

b) Finden Sie die Lösung $u(x, t)$ des Problems.

Lsg. Da das Problem exakt wie ein *Cauchy Problem* aussieht, kann man die Lösung von D'Alembert benutzen. Es folgt

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{2 + e^{x+t}}{1 + e^{-x-t}} \right) + \ln \left(\frac{2 + e^{x-t}}{1 + e^{-x+t}} \right) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 0 dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{2 + e^{x+t}}{1 + e^{-x-t}} \right) + \ln \left(\frac{2 + e^{x-t}}{1 + e^{-x+t}} \right) \right) \end{aligned}$$

c) Berechnen sie nun die Lösung des Problems für $x = 2$ nach unendliche Zeit

Lsg.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u(2, t) &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{2 + e^{2+t}}{1 + e^{-2-t}} \right) + \ln \left(\frac{2 + e^{2-t}}{1 + e^{-2+t}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2 + e^{2+t}}{1 + e^{-2-t}} \cdot \frac{2 + e^{2-t}}{1 + e^{-2+t}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4 + 2e^{2-t} + 2e^{2+t} + e^4}{1 + e^{-2+t} + e^{-2-t} + e^{-4}} \cdot \frac{e^{-t}}{e^{-t}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4e^{-t} + 2e^{2-2t} + 2e^2 + e^{4-t}}{e^{-t} + e^{-2} + e^{-2-2t} + e^{-4-t}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2e^4 \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) + 2. \end{aligned}$$

Beispiel 2. Lösen sie die folgende PDE mit der Methode der Charakteristiken:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Lsg. Man erkennt sofort dass $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$. Die PDE ist *parabolisch* da $AC - B^2 = 0$. Die charakteristische Gleichung der PDE lautet also

$$(y')^2 + 2y' + 1 = 0$$

oder

$$(y' + 1)^2 = 0$$

Man erhält die zwei Lösungen $y' = -1$ und es folgt

$$y_1 = -x + c_1$$

$$y_2 = -x + c_2$$

und also

$$\Phi(x, y) = c_1 = x + y$$

$$\Psi(x, y) = c_2 = x + y$$

Die bekannte Koordinatentransformation für eine parabolische PDE lautet

$$v = x \quad w = \Psi(x, y) = \Phi(x, y) = x + y$$

Man muss jetzt ableiten und einsetzen. Es gilt

$$u_x = u_v + u_w$$

$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}$$

$$u_{xy} = u_{vw} + u_{ww}$$

$$u_{yy} = u_{ww}$$

wobei ich $v_x = 1$, $v_{xx} = v_y = v_{xy} = 0$, $w_x = w_y = 1$ und $w_{xx} = w_{xy} = w_{yy} = 0$ benutzt habe. Einsetzen in der PDE liefert die Normalform:

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 0 \\ u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww} - 2(u_{vw} + u_{ww}) + u_{ww} &= 0 \\ u_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

das bestätigt wir haben alles richtig berechnet (die Normalform stimmt)! Nach zweimal integrieren folgt:

$$u_v = C(w), \quad u = C(w) \cdot v + D(w)$$

also

$$u(x, y) = x \cdot f_1(x + y) + f_2(x + y)$$

Beispiel 3. Sei $u(x, t)$ die Lösung von der eindimensionalen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Finden Sie $u(0, \frac{1}{2})$ mit der d'Alembertsche Formel.

Lsg. Man kann die Formel von d'Alembert direkt benutzen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) dx$$

$$\begin{aligned} u\left(0, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1 + 1) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(b) Finden Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

Lsg. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(0 + 0 + \int_{-1}^1 g(s) ds \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$