Übung 10: Wärmeletungsgleichung

10.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Die **Wärmeleitungsgleichung** ist eine PDE und ist gegeben durch

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \Rightarrow \textbf{Randbedingungen (RB)} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \Rightarrow \textbf{Anfangsbedingung (AB)} \end{cases}$$

wobei

$$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$

mit

- K: Thermische **Leitfähigkeit**.
- σ: **Spezifische Wärme**
- ρ: **Dichte** des Stabes
- c: **Thermal Diffusivity**

Dieser PDE beschreibt die Temperaturverteilung $u(x,t)$ für ein *isoliertes* entlang der $x-$Achse positioniertes Stab der Länge L.

Annahmen:

- Wärme fliesst nur in $x-$Richtung.
- Die Temperatur an der Extremitäten ist 0.
- Die Anfangstemperatur ist mit $f(x)$ beschrieben.

10.2 Lösung der Gleichung

Wie bei der Wellengleichung, löst man die Wärmeleitungsgleichung durch Separationsansätze. Die Lösung dieser Gleichung kann wiederum durch drei Schritte berechnet werden:

1. Separation der Variablen.
2. Fallunterscheidung der Lösungen (*many solutions*).
3. Lösungen durch Fourier-Reihen zusammensetzen.

10.2.1 Separation der Variablen

Bemerkung. Hier benutze ich folgender Notation: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ und $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$

Man nimmt an dass die Lösung der PDE wieder die Form

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

besitzt. Man kann das in der PDE einsetzen. Es lohnt sich zuerst ein paar Berechnungen Separat durchzuführen:

$$u_t = F\dot{G}$$

und

$$u_{xx} = F''G$$

Durch Einsetzen erhält man

$$F\dot{G} = c^2 F''G$$

oder

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

Hier ist sehr wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite der Gleichung von t unabhängig ist und die linke Seite der Gleichung von x unabhängig ist. Das ist der Hauptgrund für die Wahl dieser Lösung! Von hier folgt dass

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

wobei k eine Konstante die weder von t noch von x abhängt. Man kann das in ein Gleichungssystem umschreiben, nähmlich

$$\begin{cases} F'' &= kF \\ \dot{G} &= c^2 kG \end{cases}$$

Man kann jetzt die **Randbedingungen** benutzen:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$
$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \Rightarrow F(L) = 0$$

10.2.2 Fallunterscheidung: *many solutions*

Man versucht die erste Gleichung zu lösen:

$$F'' = kF,\ F(0) = F(L) = 0$$

Die Fallunterscheidung lautet:

$k = 0$: Die Gleichung wird zu

$$F'' = 0$$

und die Lösung lautet

$$F(x) = Ax + B,\ A, B \in \mathbb{R}$$

Mit den Randbedingungen sieht man leicht dass $F(x) = 0$ sein muss.

$k < 0$: Aus den Kurs Analysis I/II kennt man eine solche Lösung:

$$F(x) = C\cos(\sqrt{-k}x) + D\sin(\sqrt{-k}x)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$F(0) \overset{!}{=} 0 = C$$
$$F(L) = D\sin(\sqrt{-k}L) \overset{!}{=} 0$$

Die zweite Bedingung sagt entweder:

- $D = 0$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $\sin(\sqrt{-k}L) = 0$. Das heisst $\sqrt{-k}L \stackrel{!}{=} n\pi$ oder besser $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{L}$. Es folgt

$$F_n(x) = D \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$k > 0$: Aus den Kurs Analysis I/II kennt man eine solche Lösung:

$$F(x) = Ee^{\sqrt{k}x} + Ie^{-\sqrt{k}x}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} F(0) &\stackrel{!}{=} 0 = E + I \\ F(L) &\stackrel{!}{=} 0 = Ee^{\sqrt{k}L} + Ie^{-\sqrt{k}L} \end{aligned}$$

Die erste Randbedingung sagt: $E = -I$. Eingesetzt in die zweite Randbedingung liefert:

$$\begin{aligned} F(L) \stackrel{!}{=} 0 &= Ee^{\sqrt{k}L} + Ie^{-\sqrt{k}L} \\ &= E(e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L}) \end{aligned}$$

Das sagt uns entweder:

- $E = 0 = I$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L} = 0$ oder besser $2\sinh(\sqrt{k}L) = 0$ das **nie möglich** ist, weil $k > 0$.

Was also am Ende wir gefunden haben, ist dass $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{L}$ oder besser

$$k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Bemerkung. Da bis hier man nur die erste Gleichung betrachten hat, ist diese Herleitung gleich der für die Wellengleichung!
Falls jetzt man das in der zweite Gleichung einsetzt, es folgt

$$\dot{G} = -c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G$$

Man kann dass mit den Kenntnissen aus Analysis I/II lösen und finden:

$$G_n(t) = B_n \cdot e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

oder

$$G_n(t) = B_n \cdot e^{-\lambda_n^2 t}$$

wobei $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$.
Nach diesen langen Berechnungen man kann alles was gefunden ist zusammensetzen.
Da $u(x,t) = F(x)G(t)$ sein muss, gilt es

$$u_n(x,t) = B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

Mit dem Superpositionsprinzip kann man die Lösung für alle n schreiben, nähmlich:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}\right)$$

10.2.3 Zusammensetzung der Lösung mit den Fourier-Reihen

Man kann jetzt die Anfangswerte benutzen:

- $f(x)$:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

  wobei f ungerade fortgesetzt werden kann und also B_n als Koeffizient der Fourier-Reihe von $f(x)$ berechnen kann:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

Bemerkung. Ich habe diese Lösung nicht nur um präzis zu sein komplett hergeleitet: man wird sie nicht für alle Aufgaben schreiben, **ABER** man muss sie verstanden haben um ihre Resultate (einfache Koeffizientenberechnungen) anzuwenden. Es kann sein dass an der Prüfung eine solche Herleitung gefragt wird und es lohnt sich dieses Mechanismus im Kopf zu halten!

10.3 2D Wärmeleitungsgleichung und Laplace Gleichung

Was passiert falls die Lösung u zeitunabhängig ist? Die Wärmeleitungsgleichung reduziert sich zu

$$\Delta u = 0$$

Diese ist eine elliptische Gleichung und man kann verschiedene Typen von Probleme unterscheiden. Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und δG der Rand des Gebietes. Es gilt

- **Dirichlet-Problem**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } G \\ u = f(x) & \text{auf } \delta G \end{cases}$$

- **Neumann-Problem**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } G \\ \frac{du}{d\vec{n}} = \vec{g}(x) & \text{auf } \delta G \end{cases}$$

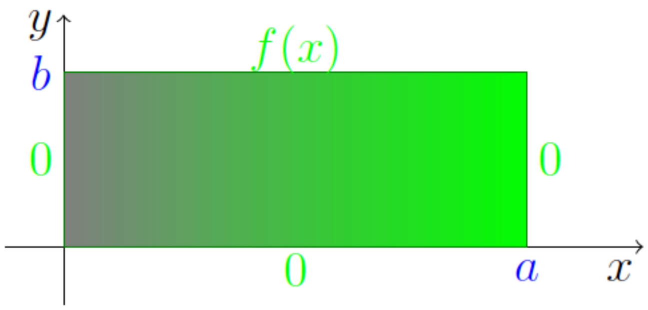
- **Robin-Problem**: Mischung der zwei.

Wir sind an dem Dirichlet-Problem Interessiert.

10.4 Dirichlet-Problem auf einem Rechteck

Das Problem beschreibt eine stationäre Temperaturverteilung auf einer rechteckigen Platte. Die Randbedingungen sind wie folgt definiert: auf drei Seiten ist die Randtemperatur 0 und entlang der vierten Seite ist sie durch $f(x)$ gegeben. Es gilt

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \le x \le a, 0 \le y \le b \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \Rightarrow \textbf{Randbedingungen (RB)} \\ u(x,b) = f(x) \Rightarrow \textbf{Randbedingung (RB)} \end{cases}$$



Man kann wiederum Separationsansatz benutzen: sei

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

Hier benutze ich folgender Notation: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ und $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$

Einsetzen liefert

$$\frac{F''}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = -k$$

Man kann das in ein Gleichungssystem

$$\begin{cases} F'' &= -kF \\ \ddot{G} &= kG \end{cases}$$

Wir betrachten die erste Gleichung und die Randbedingungen.

$$F(0) = F(a) = 0$$

Man kann sehr leicht sehen dass nur den Fall $k > 0$ Beitrag zur Lösung gibt (gleiches Vorgehen wie bei anderen Fällen). Es gilt

$$F(x) = A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x)$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen erhält man

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \ n \in \mathbb{N}$$

Man betrachtet jetzt die zweite Gleichung (nur für $k > 0$):

$$\ddot{G} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0$$

Die allgemeine Lösung für eine solche Differentialgleichung lautet

$$G_n(y) = A_n^* e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} + B_n^* e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

Mit der letzten Randbedingung folgt

$$G_n(y) = A_n^* \left(e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} - e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)}\right) = 2A_n^* \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Die komplette Lösung ist

$$u_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Mit dem Superpositionsprinzip folgt

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Mit der gegebenen Bedingung für $f(x)$ kann man berechnen:

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

10.5 Beispiele

Beispiel 1. Betrachten Sie einen isolierten, homogenen Stab mit

$$\alpha^2 = \frac{\text{Thermische Leitfähigkeit}}{\text{Dichte} \times \text{spezifische Wärme}}$$

welcher entlang der x-Achse positioniert ist. Die Anfangstemperatur sei $f(x)$, wobei die Enden auf konstanter Temperatur 0 gehalten werden. Formulieren und lösen Sie das Anfangsrandwertproblem, welches die Temperaturverteilung im Stab beschreibt, wenn

a) die Länge des Stabes gleich 6 ist und $f(x) = 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

Lsg. Man kann mit den gegebenen Informationen ($L = 6$, $c = \alpha$ und $f(x)$) das Problem mathematisch schreiben:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(6,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) = 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), 0 < x < 6 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{6}x\right) e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{36}t}$$

Mit der bekannten Lösung, kann man die Anfangsbedingung $u(x,0)$ überprüfen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{6}x\right) \stackrel{!}{=} 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

Da es nur Sinusfunktionen vorkommen, kann man einfach Koeffizientevergleich anwenden:

$$B_4 = 3,\ B_9 = 2,\ B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{4,9\}$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$u(x,t) = 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)e^{-\alpha^2\frac{4\pi^2}{9}t} + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)e^{-\alpha^2\frac{9\pi^2}{4}t}$$

b) die Länge des Stabes gleich 10 ist und $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Lsg. In diesem Fall kann man das Problem als

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{100} t}$$

Mit der bekannten Lösung, kann man die Anfangsbedingung $u(x,0)$ überprüfen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \stackrel{!}{=} \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann jetzt B_n als Fourierkoeffizient berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{10} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\ &= \frac{1}{25} \int_0^5 x \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\ &= \frac{1}{25} \left(-\frac{10x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\right)\Big|_0^5 + \frac{10}{n\pi} \int_0^5 \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\Big|_0^5 \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1)^{j+1}, & n = 2j \\ \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^j, & n = 2j+1 \end{cases}, \ j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Die komplette Lösung lautet:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sin\left(\frac{j\pi}{5}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{j^2\pi^2}{25} t} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{10}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{(2j+1)^2\pi^2}{100} t}$$

Beispiel 2. Finden Sie die zeitlich konstante Lösung der zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

für $0 \leq x, y \leq 2$ unter den Randbedingungen

$$\underbrace{u(0,y)}_{I} = \underbrace{u(2,y)}_{II} = \underbrace{u(x,0)}_{III} = 0$$

und

$$\underbrace{u(x,2)}_{IV} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$$

Lsg. Da u nicht von t abhängt, kann man die Gleichung als

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

schreiben. Dies entspricht ein Dirichlet-Problem. Man wendet Separationsansatz an mit $u(x, y) = F(x)G(y)$ und erhält die zwei Gleichungen

$$\begin{cases} F'' &= -kF \\ \ddot{G} &= kG \end{cases}$$

In unserem Fall ist $a = 2$ und also ist $\sqrt{k} = \frac{n\pi}{2}$ und mit I und II folgt

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

Die zweite Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$A_n \cosh(\sqrt{k}y) + B_n \sinh(\sqrt{k}y)$$

und der Randwert $G(0) = 0$ (aus III) liefert $A_n = 0$. Man kann jetzt die Lösung als

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)$$

Mit IV folgt

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = u(x, 2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh(n\pi)$$

Mit einem Koeffizientenvergleich sieht man folgendes:

$$B_n = 0 \ \forall n \neq 1$$

und

$$B_1 = \frac{1}{\sinh(\pi)}$$

Insgesamt hat man

$$u(x, y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

Beispiel 3. Finden Sie die Lösung $u(x, t)$ von

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Lsg. Da die Randbedingung abgeleitet sind, muss man den Separationsansatz benutzen! (die hergeleitete Formel ist nur für *normale* Probleme gültig). Sei

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Mit der gewöhnlichen Notation kriegt man

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

Die Randbedingungen übersetzen sich zu

$$F'(0) = 0$$
$$F'(\pi) = 0$$

Man lost wie immer zuerst

$$\begin{cases} F''(x) = kF(x) \\ F'(0) = F'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung liefert:

$k = 0$: Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist

$$F(x) = Ax + B$$

Mit den Randbedingungen folgt dass $F(x) = C$ konstant sein muss.

$k > 0$: Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist

$$F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$$

Mit den Randbedingungen sieht man leicht dass nur die triviale Lösung möglich ist. Also $F(x) = 0$.

$k<0$: Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist

$$F(x) = A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sin(\sqrt{-k}x)$$

Sei $p = \sqrt{-k}$. Die erste Randbedingung liefert

$$F(x) = A\cos(px)$$

und die zweite

$$p_n = n, \ n \in \mathbb{N}$$

Am Ende kriegt man

$$F_n(x) = A_n \cos(p_n x)$$

Die Gleichung für $G(t)$ liefert für die relevante Fälle

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

wobei

$$\lambda_n = cp_n = cn$$

Man setzt alle Konstanten zusammen und man kriegt mit dem Superpositionsprinzip

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos(nx) e^{-\lambda_n^2 t}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos(nx) \overset{!}{=} f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Die Koeffizienten T_n sind die Fourierkoeffizienten der $2\pi-$periodischen geraden Fortsetzung (wegen $\cos(nx)$) von f. Es gilt

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}dx \\
&= \frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}
$$

Für $n > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)dx + \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2}) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^j - 1), & n = 2j \\ \frac{2}{n^2\pi}, & n = 2j+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$
u(x,t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{((-1)^j - 1)}{j^2}\cos(2jx)e^{-4j^2c^2t} - \frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}\cos((2j+1)x)e^{-(2j+1)^2c^2t}
$$