Übung 11: Wärmeletungsgleichung auf unendliches Stab

Im Fall unendliches Stab wird das Problem zu

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x < \infty \Rightarrow \textbf{Anfangsbedingung (AB)} \end{cases}$$

11.1 Lösung mit Fourier-Integral

Man kann wiederum eine Lösung

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

finden. Einsetzen und anders als vorher Umformen liefert

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -k$$

wobei k eine Konstante die weder von t noch von x abhängt. Man kann das in ein Gleichungssystem umschreiben, nähmlich

$$\begin{cases} F'' + kF &= 0 \\ \dot{G} + c^2 kG &= 0 \end{cases}$$

Man hat keine Randbedingung hier. Falls man Fall $k < 0$ betrachtet, sieht man leicht dass

$$\begin{cases} F(x) &= Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x} \\ G(t) &= e^{-c^2 kt} \end{cases}$$

Das liefert

$$u(x,t) = \left(Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}\right) e^{-c^2 kt}$$

Die Temperatur eröht sich mit der Zeit: das ist physikalisch unmöglich. Man kann also nur den Fall $k \geq 0$ betrachten, also k positiv oder $k = p^2$. Es folgt

$$\begin{cases} F_p(x) &= A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px) \\ G_p(t) &= e^{-c^2 p^2 t} \end{cases}$$

Man berechnet das mit dem Fourier-Integral, wegen den Typ der Funktionen $f(x)$. Mit dem Superpositionsprinzip folgt

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right) e^{-c^2 p^2 t} dp$$

Mit $u(x,0) = f(x)$ kann man schreiben

$$f(x) = \int_0^\infty \left(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right) dp$$

Das ist das Fourier-Integral von $f(x)$ und man kann die Koeffizienten wie gelernt berechnen:

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv$$
$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv$$

Man kann (sieh Herleitung auf Skript **S.60**) alles anders schreiben und die Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2} dv$$

benutzen.

11.2 Lösung mit Fourier-Transform

Wir nehmen nochmals die Anfangsgleichung

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

Man kann die linke und die rechte Seite Fourier-transformieren. Es gilt

$$\mathscr{F}(u_{xx}) = -\omega^2 \mathscr{F}(u)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(u_t(x,t)) = \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{d\hat{u}}{dt}(\omega, t)
\end{aligned}$$

Man kann also schreiben:

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(\omega,t) = -c^2\omega^2 \hat{u}(\omega,t)$$

Separation der Variablen liefert

$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega) e^{-c^2\omega^2 t}$$

und mit

$$u(x,t) = f(x)$$

gilt

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$$

und also

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{-c^2\omega^2 t}$$

Man kann jetzt mit der Inverse Fourier Transform zurücktransformieren:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-c^2\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\
&= \underbrace{\ldots\ldots}_{Herleitung\ S.61\ Skript} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left(\int_0^{\infty} e^{-c^2\omega^2 t} \cos(\omega x - \omega v) d\omega \right) dv
\end{aligned}$$

11.3 Beispiele

Beispiel 1. Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

unter der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in Form eines Fourier-Integrals.

Lsg. Die allgemeine gefundere Lösung ist

$$u(x,t) = \int_0^\infty (A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px))\, e^{-c^2p^2t} dp$$

Wir berechnen die Koeffizienten $A(p)$ und $B(p)$:

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v\cos(pv)dv \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 v\cos(pv)dv \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{p}\sin(pv)\Big|_0^1 - \frac{1}{p}\int_0^1 \sin(pv)dv\right) \\ &= \frac{2}{\pi p^2}(p\sin(p) + \cos(p) - 1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v\sin(pv)dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei ich benutzt habe, dass $|x|$ eine gerade Funktion ist. Einsetzen in der allgemeine Lösung liefert

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\sin(p) + \cos(p) - 1}{p^2}\cos(px)e^{-c^2p^2t}dp$$

Beispiel 2. Man bestimme mittels Fouriertransformation (bezüglich der Variablen x) die Lösung des Anfangswertproblems (für Konstanten D, $k > 0$)

$$\begin{cases} u_t &= Du_{xx} - ku_x, \\ u(x,0) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

Lsg. Man wendet links und rechts die Fourier-Transform an. Es gilt

$$\hat{u}_t = -(D\omega^2 + ik\omega)\hat{u}$$

Man löst diese gewöhniche Differentialgliechung und erhält

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{u}(\omega,0)e^{-(D\omega^2+ik\omega)t}$$

mit

$$\hat{u}(\omega,0)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

und also

$$\hat{u}(\omega,t)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}e^{-(D\omega^2+ik\omega)t}$$

Man muss hier das umschreiben um die Eigenschaften der Fourier-Transform zu benutzen. Man betrachtet die Exponenten:

$$\begin{aligned}-\frac{\omega^2}{2}-D\omega^2t-ik\omega t&=\omega^2\left(-\frac{1}{2}-Dt\right)-ikt\omega\\&=-\frac{\omega^2}{2}(2Dt+1)-ik\omega t\\&=-\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega+\frac{ikt}{(2Dt+1)}\right)^2+\text{Kompensationsfaktor}\\&=-\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega^2+\frac{2ikt\omega}{(2Dt+1)}-\frac{k^2t^2}{(2Dt+1)^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}\end{aligned}$$

Die bessere Form ist also

$$-\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega+\frac{ikt}{(2Dt+1)}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}$$

Wieder als Exponentialfunktion geschrieben ist:

$$\hat{u}(\omega,t)=e^{-\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}}e^{-\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega+\frac{ikt}{(2Dt+1)}\right)^2}$$

Man kann hier die bekannte Regeln

$$\hat{f}(\omega+a)=e^{-iax}\hat{f}(\omega)$$

und

$$\mathscr{F}(e^{-ax^2})=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

benutzen. Hier hat man

$$\frac{1}{4a}=\frac{(2Dt+1)}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2(2Dt+1)}$$

und

$$\sqrt{2a}=\frac{1}{\sqrt{2Dt+1}}$$

Insgesamt hat man

$$\begin{aligned}u(x,t)&=e^{-\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}}e^{\frac{kt}{2Dt+1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2Dt+1}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2Dt+1}x^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2Dt+1}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2Dt+1}(x^2-2ktx+k^2t^2)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2Dt+1}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-kt)^2}{2Dt+1}}.\end{aligned}$$

Beispiel 3. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} t^2 u_x - u_t = 0, \\ u(x,0) = 3\cos(x) \end{cases}$$

Tipp: Sie brauchen nicht die Fourier Transform von $3\cos(x)$ zu berechnen.

Lsg. Man kann wie gewohnt, die Gleichung anders schreiben:

$$t^2 u_x = u_t$$

Man wendet Fourier Transform links und rechts und erhält

$$\hat{u}_t = i\omega t^2 \hat{u}$$

Das entspricht nochmals eine ODE. Man kann auch den Anfangswert transformieren, es gilt

$$\hat{u}(\omega,0) = \mathscr{F}(3\cos(x)) = \hat{f}(\omega)$$

Die ODE kann mit dem Anfangswert gelöst werden, die Lösung lautet

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega \frac{t^3}{3}}$$

Man muss jetzt die inverse Fourier Transform berechnen, um die Lösung $u(x,t)$ zu kriegen. Es gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega,t) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} e^{i\omega \frac{t^3}{3}} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega\left(x+\frac{t^3}{3}\right)} d\omega \\ &= \underbrace{f\left(x+\frac{t^3}{3}\right)}_{x-Shift} \\ &= 3\cos\left(x+\frac{t^3}{3}\right) \end{aligned}$$