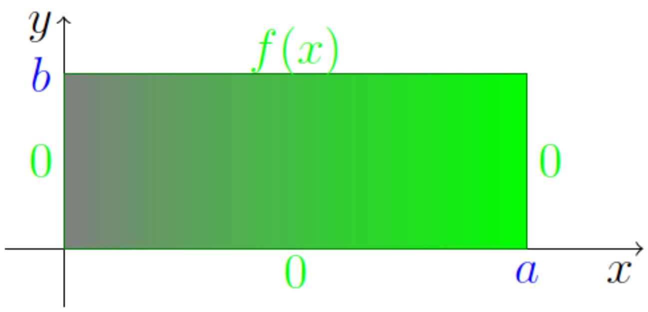
Übung 12: Dirichlet Problem mit Symmetrien

12.1 Erinnerung: Dirichlet auf einem Rechteck

Das Problem beschreibt eine stationäre Temperaturverteilung auf einer rechteckigen Platte. Die Randbedingungen sind wie folgt definiert: auf drei Seiten ist die Randtemperatur 0 und entlang der vierten Seite ist sie durch $f(x)$ gegeben. Es gilt

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \Rightarrow \textbf{Randbedingungen (RB)} \\ u(x,b) = f(x) \Rightarrow \textbf{Randbedingung (RB)} \end{cases}$$



Man kann wiederum Separationsansatz benutzen: sei

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

Hier benutze ich folgender Notation: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ und $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$

Einsetzen liefert

$$\frac{F''}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = -k$$

Man kann das in ein Gleichungssystem

$$\begin{cases} F'' &= -kF \\ \ddot{G} &= kG \end{cases}$$

Wir betrachten die erste Gleichung und die Randbedingungen.

$$F(0) = F(a) = 0$$

Man kann sehr leicht sehen dass nur den Fall $k > 0$ Beitrag zur Lösung gibt (gleiches Vorgehen wie bei anderen Fällen). Es gilt

$$F(x) = A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x)$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen erhält man

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \ n \in \mathbb{N}$$

Man betrachtet jetzt die zweite Gleichung (nur für $k > 0$):

$$\ddot{G} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0$$

Die allgemeine Lösung für eine solche Differentialgleichung lautet

$$G_n(y) = A_n^* e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} + B_n^* e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

Mit der letzten Randbedingung folgt

$$G_n(y) = A_n^* \left(e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} - e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)}\right) = 2A_n^* \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Die komplette Lösung ist

$$u_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Mit dem Superpositionsprinzip folgt

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Mit der gegebenen Bedingung für $f(x)$ kann man berechnen:

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

12.2 Dirichlet auf einem symmetrischen Gebiet

Das Dirichlet Problem wird oft auf einem Gebiet mit Radialsymmetrien. Als Spezialfall, wird in der Vorlesung den Fall einer **Kreisscheibe** untersucht. Man benutzt die bekannte Polarkoordinaten:

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Das Problem wird zu

$$\begin{cases} \Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{auf } \{(x,y) \text{ s.d. } x^2+y^2 < R^2\} \\ u = f, & \text{auf } \{(x,y) \text{ s.d. } x^2+y^2 = R^2\} \end{cases}$$

Man kann das Problem in Polarkoordinaten umschreiben:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_r\frac{1}{r} = 0, & \text{auf } \{(r,\theta) \text{ s.d. } 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \\ u(R,\theta) = f(\theta), & \text{auf } \{(R,\theta) \text{ s.d. } 0 \le \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Bemerkung. Man kann die Herleitung von Δu in Polarkoordinaten auf **S.67** des Skriptes: das Resultat kann ohne Herleitungen benutzt werden!

12.2.1 Lösung der Gleichung

Wie bei der Wellengleichung und der Wärmeleitungsgleichung löst man das Problem durch Separationsansätze. Die Lösung dieser Gleichung kann wiederum durch drei Schritte berechnet werden:

1. Separation der Variablen.
2. Fallunterscheidung der Lösungen (*many solutions*).
3. Lösungen durch Fourier-Reihen zusammensetzen.

12.2.2 Separation der Variablen

Bemerkung. Hier benutze ich folgender Notation: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$ und $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}$

Man nimmt an dass die Lösung der PDE wieder die Form

$$u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$$

besitzt. Man kann das in der PDE einsetzen: es gilt

$$\begin{aligned}
&F''G + \frac{1}{r^2}F\ddot{G} + \frac{1}{r}F'G = 0\\
&r^2F''G + F\ddot{G} + rF'G = 0\\
&(r^2F'' + rF')G = -F\ddot{G}\\
\Rightarrow &\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = k
\end{aligned}$$

Hier ist sehr wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite der Gleichung von r unabhängig ist und die linke Seite der Gleichung von θ unabhängig ist. Das ist der Hauptgrund für die Wahl dieser Lösung! Von hier folgt dass

$$\begin{cases} r^2F'' + rF' - kF & = 0 \\ \ddot{G} + kG & = 0 \end{cases}$$

wobei k eine Konstante die weder von r noch von θ abhängt. Die **Randbedingungen** lauten:

$$\begin{aligned}
G(0) &= G(2\pi)\\
\dot{G}(0) &= \dot{G}(2\pi)
\end{aligned}$$

12.2.3 Fallunterscheidung: *many solutions*

Man versucht die zweite Gleichung zu lösen:

$$\ddot{G} + kG = 0,\ G(0) = G(2\pi),\ \dot{G}(0) = \dot{G}(2\pi)$$

Die Fallunterscheidung lautet:

$k = 0$: Die Gleichung wird zu

$$\ddot{G} = 0$$

und die Lösung lautet

$$G(\theta) = A\theta + B,\ A, B \in \mathbb{R}$$

Mit der ersten Randbedingung folgt:

$$G(0) = B = 2\pi A + B = G(2\pi)$$

Das heisst $A = 0$. Mit der zweiten Randbedingung folgt dass $G(\theta) = B =$konstant sein muss.

$k < 0$: Aus den Kurs Analysis I/II kennt man eine solche Lösung:

$$G(\theta) = Ce^{\sqrt{-k}\theta} + De^{-\sqrt{-k}\theta}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$C + D = Ce^{\sqrt{-k}2\pi} + De^{-\sqrt{-k}2\pi}$$
$$\sqrt{-k}C - \sqrt{-k}D = \sqrt{-k}Ce^{-\sqrt{-k}2\pi} - \sqrt{-k}De^{-\sqrt{-k}2\pi}$$

also

$$C + D = Ce^{\sqrt{-k}2\pi} + De^{-\sqrt{-k}2\pi}$$
$$C - D = Ce^{\sqrt{-k}2\pi} - De^{-\sqrt{-k}2\pi}$$

Man addiert die zwei Gleichungen und erhält

$$2C = 2Ce^{\sqrt{-k}2\pi}$$

Die einzige Lösung ist $C = 0$. Einsetzen in obigen System liefert $D = 0$. Den Fall $k < 0$ gibt also keinen Beitrag zur Lösung.

$k > 0$:

$$G(\theta) = E\cos(\sqrt{k}\theta) + H\sin(\sqrt{k}\theta)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$E = E\cos(\sqrt{k}2\pi) + H\sin(\sqrt{k}2\pi)$$
$$H = -E\sin(\sqrt{k}2\pi) + H\cos(\sqrt{k}2\pi)$$

Man multipliziert die erste Gleichung mit H und die zweite mit E und vergleicht die zwei Gleichungen:

$$H^2\sin(\sqrt{k}2\pi) = -E^2 sin(\sqrt{k}2\pi)$$

Da $-E^2 = H^2$ nie möglich ist, muss $\sin(\sqrt{k}2\pi) = 0$ gelten. Das heisst $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$$

Falls jetzt man das in der ersten Gleichung einsetzt, folgt

$$r^2F'' + rF' - n^2F = 0$$

Man kann dass mit den Kenntnissen aus Analysis I/II (**Euler Differentialgleichung**) lösen und finden:

$$F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$$

Man will aber dass die Lösung im Gebiet beschränkt bleibt. Für $r \to 0$ hat man ein Problem mit den zweiten Term der Lösung: man setzt $Q_n = 0$ um das zu vermeiden.

Bemerkung. Falls man gefragt ist, die Lösung ausserhalb der Scheibe beschränkt zu haben, muss man $P_n = 0$ setzen.

Nach diesen langen Berechnungen man kann alles was gefunden ist zusammensetzen. Da $u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$ sein muss, gilt es

$$u_n(r,\theta) = r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

Mit dem Superpositionsprinzip kann man die Lösung für alle n schreiben, nähmlich:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

12.2.4 Zusammensetzung der Lösung mit den Fourier-Reihen

Man kann jetzt die Anfangswerte benutzen:

- $f(\theta)$:
$$f(\theta) = u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$
Man berechnet die Fourier-Koeffizienten der $2\pi-$periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:
$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \\ A_n &= \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(n\phi) d\phi \\ B_n &= \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi \end{aligned}$$

Man setzt den Resultate in der allgemeine Lösung und nach eine lange Berechnung (sieh **S.71** des Skriptes) man kriegt

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi$$

Die Funktion

$$K(r, \theta, R, \phi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

ist **Poisson Integral Kernel** genannt und die Lösung ist durch

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta, R, \phi) f(\phi) d\phi$$

gegeben.

Bemerkung. Ich habe diese Lösung nicht nur um präzis zu sein komplett hergeleitet: man wird sie nicht für alle Aufgaben schreiben, **ABER** man muss sie verstanden haben um ihre Resultate (einfache Koeffizientenberechnungen) anzuwenden. Es kann sein dass an der Prüfung eine solche Herleitung gefragt wird und es lohnt sich dieses Mechanismus im Kopf zu halten!

12.3 Beispiele

Beispiel 1. Finden Sie die zeitlich konstante Lösung u der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \nabla^2 u$$

auf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}$, wobei die Temperatur auf dem Rand durch

$$u(x, y) = xy$$

gegeben ist.

Lsg. Die Differentialgleichung wird zu

$$\nabla^2 u = 0$$

Man erkennt wie das Gebiet aussehen sollt: D ist eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 4, das entspricht ein Radialsymmetrisches Gebiet. Mit den Polarkoordinaten

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases}$$

bekommt man das transformierte Problem

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_r\frac{1}{r} = 0, & \text{auf } \{(r,\theta) \text{ s.d. } 0 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ u(4,\theta) = 16\cos(\theta)\sin(\theta), & \text{auf } \{(R,\theta) \text{ s.d. } 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung darf als bekannt benutzt werden. Es gilt

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Mit den Randbedingung folgt

$$\begin{aligned} u(4, \theta) &= 16\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= 8\sin(2\theta) \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

Man muss hier die Fourier-Koeffizienten nicht berechnen, ein Vergleich reicht und ergibt

$$\begin{aligned} A_n &= 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ B_n &= 0,\ n \in \mathbb{N} \backslash \{2\} \\ B_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(r, \theta) = \frac{r^2}{2}\sin(2\theta)$$

Beispiel 2. Bestimmen Sie die Lösung des Dirichlet-Problems in Polarkoordinaten auf einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius R, wenn

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u(R, \theta) = |\theta|,\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Lsg. Die allgemeine Lösung lautet

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Die Randbedingung liefert

$$\begin{aligned} u(R,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \\ &\stackrel{!}{=} |\theta| \end{aligned}$$

Mit den gelernten Formeln kann man die Koeffizienten der Fourierreihen-Entwicklung berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi}\phi^2\Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(n\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} \phi\cos(n\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{R^n\pi}\left(\underbrace{\frac{\phi}{n}\sin(n\phi)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin(n\phi)d\phi\right) \\ &= \frac{1}{R^n n^2\pi}\cos(n\phi)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin(n\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} \phi\sin(n\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{R^n\pi}\left(-\frac{\phi}{n}\cos(n\phi)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(n\phi)d\phi\right) \\ &= \frac{1}{R^n\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin(n\phi)\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\right) \\ &= -\frac{2}{R^n n}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung lautet also

$$u(r,\theta) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n n}\sin(n\theta).$$

Beispiel 3. Gesucht ist die Lösung der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten der Einheitsscheibe, wobei auf dem Rand gilt

$$u_r(1,\theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$$

Lsg. Die allgemeine Lösung ist immer

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Die Randbedingung verlangt

$$\begin{aligned} u_r(1,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \\ &\overset{!}{=} \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta) \end{aligned}$$

Man muss hier die Fourier-Koeffizienten nicht berechnen, ein Vergleich reicht und ergibt

$$\begin{aligned} A_n &= 0,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{2\} \\ A_2 &= \frac{1}{2}, \\ B_n &= 0,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{3\} \\ B_3 &= 1 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(r,\theta) = \frac{r^2}{2}\cos(2\theta) + r^3 \sin(3\theta)$$