Übung 1: Laplace Transform - Einführung

1.1 Laplace Transform: Anwendungsbereich

Die Laplace Transformation (oder Transform) ist eine Integraltransformation die eine Funktion f von reellen Zeitbereich in eine Funktion F im komplexen Bereich (Frequenzbereich, sieh Vorlesung Regelungstechnik) transformiert. Diese Methode dient zur Verständnis, Vereinfachung und Analyse von viele Ingenieurwissenschaftliche Probleme wie z.B. die Signalverarbeitung und die Analyse von Systeme. Am wichtigsten wendet man diese Methode an Differentialgleichungen, wo man nach der Transformation einfach algebraische Gleichungen lösen muss, anstatt die im Kurs Analysis II gelernte Prozedur zu benutzen.

1.2 Definition

Vor allem, muss die Laplace Transform definiert werden, es gilt

Definition 1. Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, dann definiert man die Laplace Transform als

$$\mathscr{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt$$

Definition 2. Man definiert die **Inverse** Laplace Transform als

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$$

Bemerkung. Es wird in diesem Kurs keine eindeutige Formel um die Inverse Laplace Transform zu berechnen gegeben. In den Übungen man braucht deshalb einige bekannte Transformationen (sieh Tabelle).

1.3 Erste Eigenschaften

Die Eigenschaften der Laplace Transform können sehr nützlich bei Berechnungen werden, die erste zwei sind:

(I) **Linearität:**

$$\mathscr{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathscr{L}(f(t)) + \beta \mathscr{L}(g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha \mathscr{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathscr{L}^{-1}(G(s)) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

(II) **S-Shifting** (auch erste Verschiebungssatz):

$$\mathscr{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$$

Bemerkung. Normalerweise berechnet man zuerst $F(s)$ mit $f(t)$ und dann setzt man $s-a$ anstatt s.

1.4 Erste bekannte Laplace Transforms

Die erste zwei bekannte Laplace Transforms die man lernt sind:

(a)

$$f(t) = t^n,\ n \geq 0 \Longrightarrow \mathscr{L}(f(t)) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(b)

$$f(t) = e^{at},\ a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{s - a},\ s > 0$$

1.5 Beispiele

Beispiel 1. Gegeben sei $f(t) = t^3 - 2t + 8$. Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$.

Lsg. Mit der bekannte Laplace Transform (b) und mit der Linearitätseigenschaft, man kann die einzelne Terme berechnen und sie dann zusammenaddieren:

$$\mathscr{L}(t^3 - 2t + 8) = \mathscr{L}(t^3) - 2\mathscr{L}(t) + 8\mathscr{L}(1) = \frac{3!}{s^4} - \frac{2!}{s^2} + 8\frac{0!}{s} = \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s}$$

Beispiel 2. Gegeben sei $f(t) = (2t-3)^2$. Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$.

Lsg.

$$\mathscr{L}((2t-3)^2) = \mathscr{L}(4t^2 - 12t + 9) = 4\mathscr{L}(t^2) - 12\mathscr{L}(t) + 9\mathscr{L}(1) = 4\frac{2!}{s^3} - 12\frac{1!}{s^2} + 9\frac{0!}{s} = \frac{8}{s^3} - \frac{12}{s^2} + \frac{9}{s}$$

Beispiel 3. Gegeben sei $f(t) = \cos(\omega t)$. Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$.

Lsg. Obwohl die Laplace Transform von $\cos(\omega t)$ normalerweise bekannt ist, versucht hier man sie mit der Definition der Transform zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\cos(\omega t)) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t) dt \\
&= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(\omega t) \Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin(\omega t) dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \sin(\omega t) \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t) dt \right) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2} \mathscr{L}(\cos(\omega t))
\end{aligned}$$

Durch Lösen der Gleichung folgt

$$\mathscr{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Bemerkung. Es ist sehr wichtig die Berechnung mit der Definition zu kennen! Es werden oft (auch in anderen Vorlesungen wie z.B. RTI) einfach Tabellen mit bekannten Transforms benutzt: man muss aber wissen woher kommen diese und wieso sie so aussehen!

Beispiel 4. Gegeben sei

$$f(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$

Lsg.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^\infty 0 dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{s} e^{-st} dt \\
&= -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 \right) \\
&= -\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 5. Gegeben sei $F(s) = \frac{s}{s^2-1}$. Finden Sie $f(t)$.

Lsg. Wie gesagt, es gibt keine allgemeine Methode um die Inverse Laplace Transform zu finden. Was aber man machen kann, ist eine günstigere und einfachere erkennbare Form erreichen:

$$F(s) = \frac{s}{s^2-1} = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

Mit Partialbruchzerlegung schreibt man

$$\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

Es folgt

$$As + A + Bs - B \overset{!}{=} s \Longrightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

Das heisst

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)$$

Es gilt

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)) = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s-1}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1})\right)$$

Man kann mit der zweite bekannte Transform einfach ablesen, dass

$$\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s-1}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1})\right) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \cosh(t)$$