Übung 2: Laplace Transform, Vertiefung

2.1 Eigenschaften

Die Eigenschaften der Laplace Transform können sehr nützlich bei Berechnungen werden.

(I) **Linearität:**

$$\mathscr{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathscr{L}(f(t)) + \beta \mathscr{L}(g(t)) = F(s) + G(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha \mathscr{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathscr{L}^{-1}(G(s)) = f(t) + g(t)$$

(II) **S-Shifting** (auch erste Verschiebungssatz):

$$\mathscr{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$$

Bemerkung. Normalerweise berechnet man zuerst $F(s)$ mit $f(t)$ und dann setzt man $s-a$ anstatt s.

(III) **T-Shifting** (auch zweite Verschiebungssatz)

$$\mathscr{L}(u(t-a) \cdot f(t-a)) = e^{-as} \cdot \mathscr{L}(f(t))$$

und

$$u(t-a) \cdot f(t-a) = \mathscr{L}^{-1}(e^{-as} \cdot \mathscr{L}(f(t)))$$

(IV) **Ableitungssatz** (in t)

$$\mathscr{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \mathscr{L}(f(t)) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0), \; n \geq 1$$

Am meistens werden benutzt:

- $n = 1$: $\mathscr{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$
- $n = 2$: $\mathscr{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

(V) **Integralsatz**

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{1}{s} F(s), \; t > 0, \; s > 0$$

2.2 Bekannte Laplace Transforms

Mit dieser Liste kann man normalerweise allen Aufgaben von Analysis III lösen:

$f(t)$	$\mathscr{L}(f(t))$
t^n, $n \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\sin(at)$, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$u(t-a)$, $a \geq 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$

2.3 Lösen von Anfangswertprobleme (AWP)

Die Laplace Transforms können sehr nützlich sein, um schnell Anfangswertprobleme zu lösen. Man geht wie folgt vor:

(1) Wende $\mathscr{L}$ auf beide Seiten der Differentialgleichung an und setze $\mathscr{L}(y(t)) = Y(s)$ (verwende **(IV)**).

(2) Bringe die Gleichung auf die Form $Y(s) = \dots$ (verwende gegebene Anfangswerte).

(3) Berechne die Inverse Laplace Transform mithilfe von **(I)**,**(II)**,**(IV)**. Man erhält am Ende $y(t)$.

2.4 Beispiele

Beispiel 1. Was ist die Laplace Transform von $h(t) = 5t^2e^{-2t}$?

Lsg. Man muss s-shifting benutzen, d.h. man muss die Konstante a und die Funktion f identifizieren. In diesem Fall sind

$$f(t) = 5t^2,\ a = -2$$

Mit dem Theorem folgt

$$F(s) = \mathscr{L}(5t^2) = 5\mathscr{L}(t^2) = \frac{10}{s^3}$$

und

$$H(s) = F(s-a) = F(s+2) = \frac{10}{(s+2)^3}$$

Beispiel 2. Was ist die Inverse Laplace Transform von $G(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{5}{4}}$?

Lsg. Man muss zuerst versuchen, eine bessere Form zu erreichen: um s-shifting zu benutzen es ist oft nützlich eine bekannte Transformation zu verwenden. Hier haben wir im Zäler ein Term mit s und im Nenner ein Term mit s^2, d.h. man kann versuchen das mit $\mathscr{L}(\cos(at)) = \frac{s}{\alpha^2+s^2}$ darzustellen. Da im Zäler $s + \frac{1}{2}$ steht, versucht man das auch im Nenner im quadrat zu haben:

$$G(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{5}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+1^2}$$

Man kann einfach ablesen, dass

$$f(t) = \cos(\alpha t),\ a = -\frac{1}{2},\ \alpha = 1$$

Es folgt

$$G(t) = e^{at}f(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos(t)$$

Beispiel 3. Bestimmen Sie mit der Ableitungsregel die Laplace Transform von $f(t) = t\cos(2t)$.

Lsg. Man muss die erste zwei Ableitungen von $f(t)$ berechnen und $f(t), f'(t)$ in 0 berechnen:

$$f(t) = t\cos(2t),\ f(0) = 0$$

$$f'(t) = \cos(2t) - 2t\sin(2t),\ f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -2\sin(2t) - 2\sin(2t) - 4\underbrace{t\cos(2t)}_{f(t)} = -4\sin(2t) - 4f(t)$$

Durch Einsetzen erhält man

$$f(t) = -\frac{f''(t)}{4} - \sin(2t)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) &= -\frac{1}{4}\mathscr{L}(f''(t)) - \mathscr{L}(\sin(2t)) \\
&= -\frac{1}{4}\left(s^2\mathscr{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)\right) - \mathscr{L}(\sin(2t)) \\
&= -\frac{1}{4}s^2\mathscr{L}(f(t)) + \frac{1}{4} - \frac{2}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Man löst diese Gleichung und erhält

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{s^2-4}{(4+s^2)^2}$$

Beispiel 4. *Prüfungsaufgabe HS 2015*

Finden Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$f(t) = \cos(t) + \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Lsg. Man kann die Linearität der Transformation benutzen und die Integralregel benutzen. Man transformiert beide Seiten der Gleichung, es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) &= \mathscr{L}(\cos(t)) + \mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{s}{s^2+1} + \frac{\mathscr{L}(f(t))}{s}
\end{aligned}$$

Man kann jetzt auf $\mathscr{L}(f(t))$ lösen:

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$\frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right)$$

Falls man das rücktransformiert, man erhält

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^t$$

Beispiel 5. Berechnen Sie die Inverse Laplace Transform von $F(s) = \frac{1-e^{2s}}{s^2+4}$

Lsg. Man vereinfacht:

$$F(s) = \frac{1-e^{2s}}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4} - \frac{e^{2s}}{s^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{2e^{2s}}{s^2+2^2}\right)$$

Mit t-shifting folgt

$$F(s) = \mathscr{L}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}u(t+2)\sin(2(t+2))\right)$$

Das heisst

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}u(t+2)\sin(2(t+2))$$

Beispiel 6. Löse das Anfangswertproblem $\begin{cases} y' - 5y = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ für $f(t) = \begin{cases} 3e^t, & 0 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

Lsg. Wie kann man arbeiten mit so eine definierter Funktion? In diesem Typ von Problemen, versucht man die Funktion durch die heavyside Funktion u auszudrücken. In diesem Fall ist

$$f(t) = 3e^t - 3e^t u(t-2)$$

Man wendet die Kochrezept an: man findet die Laplace Transform der linke Seite der Differentialgleichung

$$\mathscr{L}(y' - 5y) = \mathscr{L}(y') - \mathscr{L}(5y) = sY - y(0) - 5Y = (s-5)Y - 1$$

Dieselbe Prozedur wird rechts durchgeführt:

$$\mathscr{L}\left(3e^t - 3e^t u(t-2)\right) = 3\mathscr{L}(e^t) - 3\mathscr{L}\left(e^t u(t-2)\right) = \frac{3}{s-1} - 3\mathscr{L}\left(e^2 e^{t-2} u(t-2)\right) = \frac{3}{s-1} - \frac{3e^{2-2s}}{s-1}$$

Man löst jetzt auf $Y(s)$ und bekommt

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s-5)} - \frac{3e^{2(1-s)}}{(s-1)(s-5)} + \frac{1}{(s-5)}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$Y(s) = -\frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-5} + \frac{3}{4}e^2\left(\frac{e^{-2s}}{s-1} - \frac{e^{-2s}}{s-5}\right) + \frac{1}{s-5}$$

Man wendet $\mathscr{L}^{-1}$ auf beiden Seiten und erhält

$$y(t) = -\frac{3}{4}(e^t - e^{5t} - e^2\left(u(t-2)e^{t-2} - u(t-2)e^{5(t-2)}\right)) + e^{5t}$$