Übung 3: Laplace, letzte Eigenschaften

3.1 Dirac Delta Funktion

Die Dirac Delta Funktion ist eine sehr nützliche Distribution die z.B. einen **Impuls** darstellt. Man definiert sie als

Definition 1.

$$\delta(t-a) := \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

3.1.1 Eigenschaften

Wir werden zwei wichtige Eigenschaften benutzen:

(1)

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)dt = g(a)$$

(2)

$$\mathscr{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$$

Bemerkung. Sieh Skript auf Seite 13 für die Herleitung von (2).

3.2 Faltungssatz (Convolution)

Wir wissen dass $\mathscr{L}(f+g) = \mathscr{L}(f) + \mathscr{L}(g)$. Leider das funktioniert nicht mit dem Produkt zweier Funktionen, d.h.

$$\mathscr{L}(f \cdot g) \neq \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)$$

Man kann ein anderes Produkt definieren: die Faltung (Convolution).

Definition 2. Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g ist gegeben durch

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Bemerkung. Die Faltung hat die gewünschte Eigenschaft: $\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)$. Die Herleitung kann man auf dem Skript auf Seite 14/15 finden.

3.2.1 Eigenschaften

(a) $f * g = g * f$

(b) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(c) $f * (g * h) = (f * g) * h$

(d) $f * 0 = 0 * f = 0$

(e) $f * 1 \neq f$

(f) $f * f$ ist **nicht** immer ≥ 0

3.3 Differentiationsregel

Wir haben gelernt, wie die Laplace Transform der Ableitung einer Funktion sich verhält, nicht aber wie die Ableitung einer Laplace Transform sich berechnet:

Definition 3. Falls f eine stückweise stetige Funktion ist, es gilt

$$\mathscr{L}'(f(t)) = \frac{\partial}{\partial s}(\mathscr{L}(f(t))) = -\mathscr{L}(t \cdot f(t))$$

Bemerkung. Sieh für Herleitung Seite 17 des Skriptes.

3.4 Integrationsregel

Definition 4. Falls f eine stückweise stetige Funktion ist und $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existiert, es gilt

$$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \int_s^\infty \mathscr{L}(f)(\sigma)d\sigma = \mathscr{L}(\frac{f(t)}{t})$$

Bemerkung. Sieh für Herleitung Seite 17 des Skriptes.

3.5 Beispiele

Beispiel 1. Man betrachtet die Integralgleichung

$$y(t) - \cos(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

Bestimme $y(t)$.

Lsg. Man beachte zuerst (aus Faltungssatz), dass

$$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = y(t) * \cos(t)$$

Wie gewohnt, man wendet auf beide Seiten der Gleichung Laplace an:

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathscr{L}(y(t))}_{Y(s)} - \mathscr{L}(\cos(t)) &= \mathscr{L}(y(t) * \cos(t)) \\ &= \underbrace{\mathscr{L}(y(t))}_{Y(s)} \cdot \mathscr{L}(\cos(t))\end{aligned}$$

Durch einfaches Umformen

$$\begin{aligned}Y(s) \cdot (1 - \mathscr{L}(\cos(t)) &= \mathscr{L}(\cos(t)) \\ Y(s) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{s}{s^2+1}\right)}_{\frac{s^2-s+1}{s^2+1}} &= \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}Y(s) = \frac{s}{s^2-s+1} &= \frac{s}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ &= \mathscr{L}\left(e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; y(t) = e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Beispiel 2. Finde die Laplace Transform von $f(t) = t^2\sin(2t)$.

Lsg. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(t^2\sin(2t)) &= \mathscr{L}(t\cdot t\sin(2t))\\
&= -\mathscr{L}'(t\sin(2t))\\
&= -(-\mathscr{L}''(\sin(2t))\\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathscr{L}(\sin(2t))\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{2}{s^2+4}\right)\\
&= 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{-2s}{(s^2+4)^2}\right)\\
&= \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}
\end{aligned}$$

Beispiel 3. Berechne die Inverse Laplace Transform von $\frac{4}{(s-2)^2}$ mit der Differentiationsregel.

Lsg. Man muss hier schalu sein und versuchen was man schon kennt zu benutzen: man hat im Nenner $(s-2)^2$. Die einzige Funktion deren Laplace Transform $(s-2)$ im Nenner hat ist e^{2t}, d.h.

$$\mathscr{L}(e^{2t}) = \frac{1}{(s-2)}$$

Man braucht aber $(s-2)^2$: Differentiationsregel enthält eine Ableitung, hier z.B.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathscr{L}(e^{2t})\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) = -\frac{1}{(s-2)^2}$$

das heisst

$$\frac{4}{(s-2)^2} = -4\cdot\mathscr{L}'(e^{2t})$$

und

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s-2)^2}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(-4\cdot\mathscr{L}'(e^{2t})\right) = 4\cdot\mathscr{L}^{-1}\left(-\mathscr{L}'(e^{2t})\right) \overset{\text{Def.}}{=} 4\cdot\mathscr{L}^{-1}\left(\mathscr{L}(te^{2t})\right) = 4te^{2t}$$

Beispiel 4. Berechne die Inverse Laplace Transform von $\frac{4}{(s-2)^2}$ mit der Integrationsregel.

Lsg. Da man $F(s) = \frac{4}{(s-2)^2}$ schon kennt, kann man die Integrationsregel direkt als Gleichung anwenden:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\frac{f(t)}{t}) = \int_s^\infty \mathscr{L}(f)(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma\\
&= \int_s^\infty \frac{4}{(\sigma-2)^2}d\sigma\\
&= -4\int_s^\infty \left(\frac{1}{(\sigma-2)}\right)' d\sigma\\
&= -4\left(\frac{1}{(\sigma-2)}\right)\Big|_s^\infty\\
&= \frac{4}{s-2}
\end{aligned}$$

Das resultiert in einer Gleichung:

$$\mathscr{L}(\frac{f(t)}{t}) = \frac{4}{s-2}$$

Man wendet $\mathscr{L}^{-1}$ beidseitig und erhält

$$\frac{f(t)}{t} = 4 \cdot \mathscr{L}\left(\frac{1}{s-2}\right) = 4e^{2t} \Rightarrow f(t) = 4te^{2t}$$

Beispiel 5. *Prüfungsaufgabe HS 2016*

Finden Sie mit Hilfe der Laplacetransform die Lösung der Integralgleichung

$$6f(t) = 2t^3 + \int_0^t (t-\tau)^3 f(\tau) d\tau$$

Mit Laplacetransform und Faltungssatz folgt

$$\begin{aligned} 6\mathscr{L}(f(t)) &= 2\mathscr{L}(t^3) + \mathscr{L}(t^3 * f(t)) \\ &= 2\mathscr{L}(t^3) + \mathscr{L}(t^3)\mathscr{L}(f(t)) \end{aligned}$$

Es gilt jetzt

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(f(t)) \cdot (6 - \mathscr{L}(t^3)) = 2\mathscr{L}(t^3) \\ &\Rightarrow \mathscr{L}(f(t)) \cdot \left(\frac{6(s^4-1)}{s^4}\right) = \frac{12}{s^4} \\ &\Rightarrow \mathscr{L}(f(t)) = \frac{2}{s^4-1} = \frac{2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$\frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

und

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 0,\ D = -1$$

Es folgt

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) - \sin(t)$$