Übung 4: Fourier-Reihe, Eigenschaften

4.1 Fourier Analysis: Anwendungsbereich

Die **Fourier-Reihe** ist ein sehr wichtiges Werkzeug, um periodische Phänomene zu beschreiben. Man zerlegt komplizierte *periodische* Funktionen in einer linearer Kombination einfacheren Basisfunktionen wie Sinus und Cosinus.
Die **Fourier Integrale** erlauben eine ähnliche Zerlegung für *nicht periodische* Funktionen.
Die Fourier Analysis findet ihre Anwendung z.B. in der Signaltheorie, Analyse von dynamische Systeme und Lösen von Differentialgleichungen.

4.2 Orthogonalitätsrelationen

Es existieren drei sehr wichtige Relationen, die die Berechnungen bei der Fourier Analysis viel vereinfachen. Seien $n, m \geq 0$, es gilt

(1)

$$\int_{-L}^{L} \cos(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0 \end{cases}$$

(2)

$$\int_{-L}^{L} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \end{cases}$$

(3)

$$\int_{-L}^{L} \cos(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = 0 \ \forall \ n, m$$

Bemerkung. Sieh auf Seite 21 des Vorlesungsskriptesfür die Herleitungen.

4.3 Definition

Um die Fourier Reihe zu definieren, muss man verschiedene Konzepte einführen:

Definition 1. Eine Funktion $f(x)$ heisst **periodisch** falls es für fast alle $x \in \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{R}_+$ mit $f(x+p) = f(x)$ existiert.

Definition 2. $\{\sin(\frac{n\pi}{L}x),\ \cos(\frac{n\pi}{L}x),\ n \in \mathbb{N}\}$ bilden ein **trigonometrisches** System und erfüllen die Orthogonalitätsrelationen.

Definition 3. Die **Fourier-Reihe** einer $2L-$periodischen Funktion ist gegeben durch

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cos(\frac{m\pi}{L}x) + b_m \sin(\frac{m\pi}{L}x)]$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$
$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)dx,\ \ m > 0$$
$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx,\ \ m > 0$$

Falls f eine *periodische, stückweise stetige* Funktion ist, sie muss in alle **Unstetigkeitsstellen** gegen

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

konvergieren, wobei

$$f(x_0^\pm) = \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 \pm \varepsilon)$$

4.4 Vorgehen bei der Berechnung: Kochrezept

Gegeben: $f(x)$ mit Periode p auf Definitionsbereich $\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$.

(I) Bestimme L: $2L = p \Leftrightarrow L = \frac{p}{2}$

(II) Berechne die Koeffizienten a_0, a_m, b_m mit der Partielle Integration und den Orthogonalitätsrelationen

(III) Stelle $f(x)$ als Fourier-Reihe dar.

4.5 Beispiele

Beispiel 1. Skizziere den Graphik von $f(x) = |\cos(x)|,\ -\pi < x < \pi$.

Lsg.

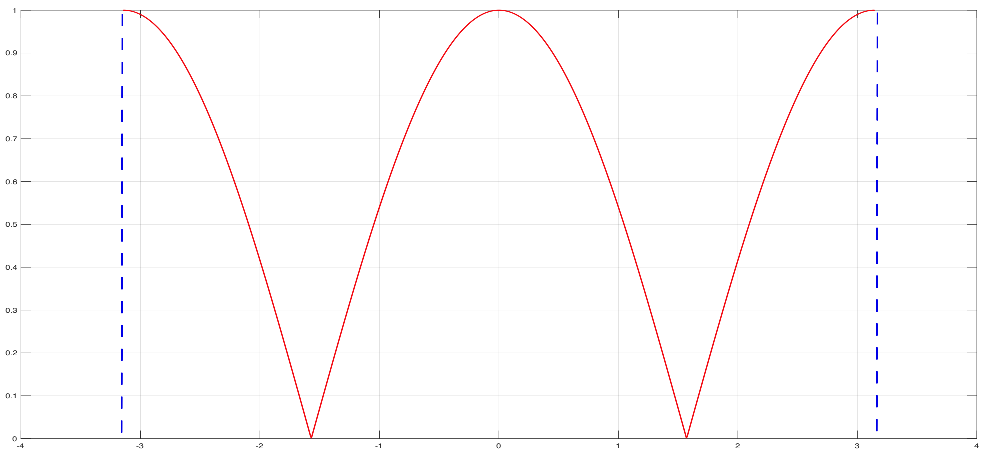

Abbildung 1: $f(x) = |\cos(x)|,\ -\pi < x < \pi$

Beispiel 2. Bestimme die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = \pi - x$ wenn $-\pi < x < \pi$ und die Periodizität 2π ist.

Lsg.

Man folgt die Kochrezept:

(I) Die Funktion ist 2π periodisch, d.h. $2\pi = 2L$ und also $L = \pi$.

(II) Man berechnet die Koeffizienten: es gilt

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \pi \\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos(mx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(mx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(mx)\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{m}\sin(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0,\ m\in\mathbb{N}} - \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\frac{x\sin(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0,\ m\in\mathbb{N}} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(mx)}{m}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(mx)}{m}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi m^2}\cos(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi m^2}\left((-1)^m - (-1)^m\right) \\
&= 0 \\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin(mx)\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin(mx)\,dx}_{=0,\ wie\ oben} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(mx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(mx)}{m}dx\right] \\
&= \frac{2}{m}\cos(m\pi) \\
&= \frac{2}{m}(-1)^m
\end{aligned}$$

Es folgt mit der Definition von Fourier-Reihe, dass

(III)

$$f(x) = \pi - x = \pi + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{m}(-1)^m\right)\sin(mx)$$

Beispiel 3. Betrachte die 2π-periodische Funtkion $f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < \pi < x \end{cases}$.
$f(x)$ ist nicht definiert in $x = -\pi, 0, \pi$. Wie muss man $f(x)$ an diesen Stellen definieren, so dass die Fourierreihe für $-\pi \leq x \leq \pi$ gegen $f(x)$ konvergiert?

Lsg.

$x_0 = -\pi$:

$$f(x_0^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(-\pi + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0}(\pi - \varepsilon - \pi) = 0$$
$$f(x_0^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{f(-\pi - \varepsilon)}_{=f(-\pi-\varepsilon+2\pi)=f(\pi-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0}(\pi - \varepsilon) = \pi$$

Damit die Fourier-Reihe gegen $f(x)$ konvergiert muss die Funktion in allen Unstetigkeitsstellen gegen

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

konvergieren. Hier gilt

$$\frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

$x_0 = 0$:

$$f(x_0^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 0$$
$$f(x_0^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(-\varepsilon) = -\pi$$

und

$$\frac{1}{2}(0 - \pi) = -\frac{\pi}{2}$$

$x_0 = \pi$:

$$f(x_0^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{f(\pi + \varepsilon)}_{=f(\pi+\varepsilon-2\pi)=f(-\pi+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0}(\pi - \varepsilon - \pi) = 0$$
$$f(x_0^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\pi - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0}(\pi - \varepsilon) = \pi$$

und

$$\frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

Es reicht jetzt, die Funktion zu definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = -\pi \\ -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \\ x & 0 < \pi < x \\ \frac{\pi}{2} & x = \pi \end{cases}$$