Übung 5: Betrachtung der Parität

5.1 Erinnerung und Idee

Letzte Woche hat man die allgemeine Definition einer Fourier-Reihe gelernt und die Vorgehenweise bei der Berechnung gesehen, wobei gelte

Definition 1. Die **Fourier-Reihe** einer $2L-$periodischen Funktion ist gegeben durch

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos(\frac{m\pi}{L}x) + b_m \sin(\frac{m\pi}{L}x)]$$

wobei

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)dx,\ m > 0 \\ b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx,\ m > 0 \end{aligned}$$

Die **Parität** der betrachteten Funktion kann aber die Rechungen viel vereinfachen und verkürzen. Insbesondere gilt

Definition 2. Eine Funktion $f(x)$ heisst

- **Gerade**, falls $f(x) = f(-x)$.
- **Ungerade**, falls $f(x) = -f(-x)$

Bemerkung. Es kann auch sein, dass $f(x)$ weder gerade noch ungerade ist. Aufpassen: nicht gerade $\neq$ ungerade.

5.1.1 Eigenschaften der Parität

Es gibt nützliche Eigenschaften, die bei der Lösung der Aufgaben verwendet werden können. Es seien $g_1(x), g_2(x)$ **gerade** und $u_1(x), u_2(x)$ **ungerade** Funktionen. Es gilt

(a) $g_1(x) + g_2(x)$ ist wieder gerade.

(b) $g_1(x) \cdot g_2(x)$ ist wieder gerade.

(c) $u_1(x) + u_2(x)$ ist wieder ungerade.

(d) $u_1(x) \cdot u_2(x)$ ist gerade.

(e) $g_1(x) \cdot u_1(x)$ ist ungerade.

(f) $\int_{-a}^{a} g_1(x)dx = 2 \cdot \int_0^a g_1(x)dx$.

(g) $\int_{-a}^{a} u_1(x)dx = 0$.

(h) Falls g_1 differenzierbar ist: g_1' ungerade.

(i) Falls u_1 differenzierbar ist: u_1' gerade.

5.2 Vereinfachte Fourier-Reihen

5.2.1 Fourier-Reihe für gerade Funktionen

Die **Fourier-Reihe** einer $2L-$periodischen **gerade** Funktion ist gegeben durch

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx, \ n > 0 \end{aligned}$$

5.2.2 Fourier-Reihe für ungerade Funktionen

Die **Fourier-Reihe** einer $2L-$periodischen **ungerade** Funktion ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

wobei

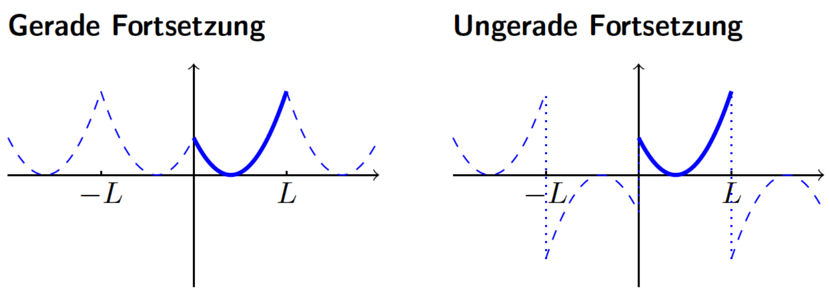
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx, \ n > 0$$

Bemerkung.

- Man kann diese zwei Vereinfachungen sehr leicht zeigen, indem man die Parität der Funktion in der allgemeine Definition der Fourier-Reihe einsetzt (probier das als Übung zu machen!).
- Es is klar, dass es sich oft lohnt am Anfang zu überprüfen, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

5.3 Gerade/Ungerade Fortsetzung

Es ist oft nützlich eine Funktion auf einem Intervall als gerade oder ungerade erweitern, so dass man die vereinfachte Versionen der Fourier-Reihe benutzen kann. Man nennt diese Prozedur *Gerade/Ungerade Fortsetzung*. Das wird immer wichtiger im Verlauf der Vorlesung.



5.3.1 Gerade Fortsetzung

Gegeben ist eine $2L-$Periodische Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $0 < x < L$.

- Man definiert $f(x) = f(-x)$ auf $-L < x < 0$.
- Man schreibt die Funktion für die verschiedene Intervalle.

5.3.2 Ungerade Fortsetzung

Gegeben ist eine $2L-$Periodische Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $0 < x < L$.

- Man definiert $f(x) = -f(-x)$ auf $-L < x < 0$.
- Man schreibt die Funktion für die verschiedene Intervalle.

Bemerkung. Wenn die Funktion nicht auf $[0, L]$, sondern auf einem anderen Intervall definiert ist, muss man zuerst die entsprechende Funktion für das gefragte Intervall $[0, L]$ durch **Verschieben** und **Spiegeln** herleiten.

5.4 Komplexe Fourier-Reihen

Aus

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cos(\frac{m\pi}{L}x) + b_m \sin(\frac{m\pi}{L}x)]$$

mit

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

und

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},\ \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

kann man die komplexe Fourier-Reihe herleiten (sieh Seite 30 des Skriptes für komplette Herleitung). Es gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi}{L}x}dx$$

Vorteile dieser Schreibeise sind:

- Exponentialfunktion ist einfacher zu integrieren
- Es gibt nur ein Koeffizient c_n zu berechnen

5.4.1 Übergang komplex → reell

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i \cdot (c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

5.4.2 Übergang reell → komplex

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_0 \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n)
\end{aligned}
$$

5.5 Beispiele

Beispiel 1. Prüfe die Parität von $f(x) = (x^2+3)^7$ und $g(x) = e^{\sin(x)}$.

Lsg. Aufgrund der Quadrat, ist $f(x) = f(-x)$, das heisst f ist eine **gerade** Funktion.
Für $g(x)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(-x) = e^{\sin(-x)} = e^{-\sin(x)} &\neq -e^{-\sin(x)} = -f(-x) \\
&\neq e^{\sin(x)} = f(x)
\end{aligned}
$$

Das heisst g ist weder gerade noch ungerade.

Beispiel 2. Gegeben ist $f(x) = -x + \pi$ auf $0 < x < \pi$. Gesucht ist die gerade Fortsetzung von f mit Periode 2π.

Lsg. Es muss gelten: $f(x) = f(-x) = -(-x) + \pi = x + \pi$ auf $-\pi < x < 0$. Das heisst

$$
f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < \pi \\ x + \pi, & -\pi < x < 0 \end{cases}
$$

Beispiel 3. Gegeben ist $f(x) = x^2$ auf $0 < x < 2$. Gesucht ist die ungerade Fortsetzung von f mit Periode 4.

Lsg. Es muss gelten: $f(x) = -f(-x) = -x^2$ auf $-2 < x < 0$. Das heisst

$$
f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 2 \\ -x^2, & -2 < x < 0 \end{cases}
$$

Beispiel 4. Gegeben ist $f(x) = x$ auf $0 < x < 3$. Gesucht ist die gerade Fortsetzung von f mit Periode 4.

Lsg. Hier ist es nicht so einfach: man muss zuerst das Intervall anpassen.
Sei f_g die gesuchte Fortsetzung und da man Periode 4 haben muss $0 < x < 2$. Dann gilt

$$
f_g(x) = f_g(-x) = f_g(-x+4) = -x + 4
$$

Das heisst

$$
f_g(x) = \begin{cases} 4 - x, & 0 < x < 2 \\ 4 + x, & -2 < x < 0 \end{cases}
$$

Beispiel 5. Gegeben sei $f(x) = -x$ auf $-\pi < 0 < \pi$, 2π periodisch. Berechnen Sie ihre komplexe Fourier-Reihe und bringen Sie diese nachträglich auf die reelle Form.

Lsg. Man beginnt mit 2 wichtige Beobachtungen: $L = \pi$ und $f(-x) = x = -f(x)$, das heisst f ist ungerade. Man muss jetzt c_n berechnen:

$$
\begin{aligned}
c_n &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{1}{in}xe^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}\right) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(e^{in\pi} - e^{-in\pi}\right) \\
&= \frac{1}{in}\cos(n\pi) - \underbrace{\frac{i}{\pi n^2}\sin(n\pi)}_{=0} \\
&= \frac{1}{in}\cos(n\pi) \\
&= \frac{(-1)^n}{in}
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{in} e^{inx}
$$

Man kann jetzt die komplexe Koeffizienten in reellen Koeffizienten umwandeln:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_n = 0 \text{ da ungerade} \\
b_n &= i \cdot (c_n - c_{-n}) = i \cdot \left(\frac{(-1)^n}{in} - \frac{(-1)^{-n}}{in}\right) = \frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

Man kann also schreiben

$$
f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx)
$$