# Übung 6: Fourier Integrale, Transform

## 6.1 Fourier Integrale

Bis jetzt hat man *periodische* Funktionen betrachtet: man muss aber oft mit nicht periodischen Funktionen arbeiten. Für diese Funktionen steht ein nützliches Tool zur Verfügung: das **Fourier Integral**. Anstatt die Fourier-Reihe wie gewohnt zu berechnen, berechnet man ein Integral in Zeitbereich: das Fourier-Integral kann verstanden werden, falls man denkt an einer Funktion dessen Periode gegen $\infty$ geht. Es gilt

**Definition 1.** Das **Fourier-Integral** einer nicht-periodischen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]d\omega$$

wobei $\omega$ die Frequenz räpresentiert und

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(\omega v)dv \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin(\omega v)dv \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Sieh für die Herleitung S.33 des Skriptes.

Man kann für gerade und ungerade Funktionen ein paar Vereinfachungen realisieren:

### 6.1.1 Fourier-Integrale für gerade Funktionen

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega \\ A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(\omega v)dv \\ B(\omega) &= 0 \end{aligned}$$

### 6.1.2 Fourier-Integrale für ungerade Funktionen

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)d\omega \\ A(\omega) &= 0 \\ B(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin(\omega v)dv \end{aligned}$$

## 6.2 Fourier Transform

Die Fourier Transformation ist eine sehr wichtige Integraltransformation. Diese Funktion erlaubt uns eine kontinuierliche Funktion in ein kontinuierliches Spektrum zu zerlegen. Für Fourier-Reihen hat man die komplexe Fourier-Reihen definiert: ähnlicherweise kann für Fourier-Integrale die Fourier Transform definieren. Falls man z.B. ein Signal hat (eine Zeitfunktion) kann man das in sein Frequenzbereich zerlegen: die Fourier-Transform entspricht die Laplace-Transform mit $s = i\omega$. Dieses Tool wird auch um ODEs, PDEs und Integralgleichungen zu lösen, benutzt.

### 6.2.1 Definition

**Definition 2.** Die **Fourier Transform** einer Funktion $f$ ist gegeben durch

$$\mathscr{F}(f(x)) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv$$

**Definition 3.** Die **Inverse Fourier Transform** ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(f(x)) e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Es gilt

$$\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f(x))) = f(x)$$

### 6.2.2 Eigenschaften

(I) **Linearität**

$$\mathscr{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \mathscr{F}(f(x)) + \beta \mathscr{F}(g(x))$$

(II) **x-Shift**

$$\mathscr{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega} \mathscr{F}(f(x)) = e^{-ia\omega} \mathscr{F}(\omega)$$

(III) **$\omega$-Shift**

$$\mathscr{F}(\omega - a) = \mathscr{F}(e^{iax} f(x))$$

(IV) **Ableitungsregeln**

- $$\mathscr{F}(f'(x)) = i\omega \mathscr{F}(f(x))$$
- $$\mathscr{F}(f''(x)) = -\omega^2 \mathscr{F}(f(x))$$

### 6.2.3 Faltungssatz

Falls $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar sowie stückweise stetig und beschränkt auf endlichen Intervallen sind, dann existiert ihre Fourier Transform und

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g)$$

$$\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathscr{F}(f \cdot g)$$

### 6.2.4 Nützliche Integrale

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)} dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

## 6.3 Beispiele

**Beispiel 1.** Berechnen Sie die Fourier Transform von

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**Lsg.** Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(v) e^{-i\omega v} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{iv} e^{-i\omega v}}_{e^{v(i-i\omega)}} dv + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{-iv} e^{-i\omega v}}_{e^{v(-i-i\omega)}} dv \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{i-i\omega} e^{v(i-i\omega)} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{i+i\omega} e^{-v(i+i\omega)} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{i-i\omega} \left( \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} e^{-\frac{i\pi\omega}{2}} - \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i} e^{\frac{i\pi\omega}{2}} \right) - \frac{1}{i+i\omega} \left( \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i} e^{-\frac{i\pi\omega}{2}} - \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} e^{\frac{i\pi\omega}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{2}{1-\omega} \cos(\frac{\omega\pi}{2}) + \frac{2}{1+\omega} \cos(\frac{\omega\pi}{2}) \right) \\
&= \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-\omega^2}
\end{aligned}$$

Man muss aber noch die kritische Fälle betrachten: $\omega = 1$ und $\omega = -1$.

- $\omega = 1$

$$\hat{f}(1) = \lim_{\omega \to 1} \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \overset{\frac{0}{0}\to LH}{=} \lim_{\omega \to 1} \frac{-\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\frac{\pi}{2}}{-2\omega} = \frac{-\pi}{-2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

- $\omega = -1$

$$\hat{f}(-1) = \lim_{\omega \to -1} \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \overset{\frac{0}{0}\to LH}{=} \lim_{\omega \to -1} \frac{-\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\frac{\pi}{2}}{-2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

**Beispiel 2.** Gegeben sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dass

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2} \cdot \cos(\omega x) d\omega$$

**Lsg.** Es sind hier Fourier-Integrale zu benutzen.
Die erste wichtige Beobachtung ist dass $f(x) = f(-x)$ (aus Eigenschaften von $\cos(x)$) und deswegen ist die Funktion *gerade*. Das bringt uns eine wichtige Information: $B(\omega) = 0$. Man kann jetzt $A(\omega)$ berechnen, es gilt:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}\cos(v)\cos(\omega v)dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)\cos(\omega v)dv \\ &= \underbrace{\sin(v)\cos(\omega v)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\cos(\frac{\pi}{2}\omega)} + \omega\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(v)\sin(\omega v)dv \\ &= \cos(\frac{\pi}{2}\omega) + \left(\underbrace{-\omega\cos(v)\sin(\omega v)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \omega^2 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)\cos(\omega v)dv}_{=A(\omega)}\right) \end{aligned}$$

Man hat also die Gleichung

$$A(\omega) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}$$

Nach Definition gilt

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega$$

das genau zeigt was gefragt war!

**Beispiel 3.** Gegeben sei

$$f(x) = \begin{cases} |x|-1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellen Sie diese Funktion als Fourier-Integral dar.

**Lsg.** Es gilt wiederum $f(x) = f(-x)$, das heisst $f(x)$ ist gerade und deshalb $B(\omega) = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(v-1)\cos(v\omega)dv \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{1}(v-1)\cos(v\omega)dv \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 v\cos(v\omega)dv - \int_0^1 \cos(v\omega)dv\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{\omega}\sin(v\omega)\Big|_0^1 - \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin(v\omega)dv - \frac{1}{\omega}\sin(v\omega)\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{\cos(v\omega)}{\omega^2}\Big|_0^1 - \frac{\sin(\omega)}{\omega}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(\omega)-1}{\omega^2}
\end{aligned}$$

Man muss noch die Spezialfälle analysieren: hier ist nur den Fall $\omega = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to 0}\frac{\cos(\omega)-1}{\omega^2} \overset{\frac{0}{0}\to LH}{=} \frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to 0}\frac{-\sin(\omega)}{2\omega} \overset{\frac{0}{0}\to LH}{=} \frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to 0}\frac{-\cos(\omega)}{2} = -\frac{1}{\pi}$$

Man kann also schreiben, dass

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega)-1}{\omega^2}\cos(\omega x)dx$$