Übung 7: PDEs, Einführung

Eine **partielle Differentialgleichung (PDE)** ist eine Differentialgleichung die, im Gegensatz zu einer gewönlichen Differentialgleichung (ODE), von mehreren Variablen abhängt. In der Gleichung treten normalerweise auch partielle Ableitungen und das erlaubt die Beschreibung von verschiedene interessante Ingenieurwissenschaftliche Probleme.

7.1 Nomenklatur

Definition 1. Eine PDE ist **linear** falls sie die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen höchstens Grad 1 haben.

Definition 2. Eine PDE ist **homogen** falls sie nur die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen enthält.

Definition 3. Die **Ordnung** einer PDE ist den Grad der höchsten vorkommende Ableitung der unbekannte Funktion.

Bemerkung. Sieh Skript für Beispiele und Gegenbeispiele.

7.2 Klassifizierung

Jede *lineare PDE zweiter Ordnung* kann durch die allgemeine Form dargestellt werden:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Von dieser Form kann man den **Typ** der PDE bestimmen. Insbesondere es gilt:

$\rightarrow AC - B^2 < 0$ **hyperbolische** PDE

$\rightarrow AC - B^2 > 0$ **elliptische** PDE

$\rightarrow AC - B^2 = 0$ **parabolische** PDE

7.2.1 Wichtigste PDEs

Wärmeleitungsgleichung:	$u_t = c^2 \Delta u$	(parabolisch)
Wellengleichung:	$u_{tt} = c^2 \Delta u$	(hyperbolisch)
Laplacegleichung:	$\Delta u = 0$	(elliptisch)
Poissongleichung:	$\Delta u = f(x, y, z)$	(elliptisch)

wobei

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

den **Laplace Operator** ist.

7.3 Beispiele

Beispiel 1. *(Prüfung HS 2013)* Bestimmen Sie den Typ von

(a)
$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + xu = 0$$

(b)
$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_y = 0$$

(c)
$$u_{xx} + 8u_{xy} + 2u_{yy} + e^x u = 0$$

Lsg. Mit der allgemeine Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

kann man finden:

(a) $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, also $AC - B^2 = 0 \to$ parabolisch.

(b) $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$, also $AC - B^2 = 1 \to$ elliptisch.

(c) $A = 1$, $B = 4$, $C = 2$, also $AC - B^2 = -14 \to$ hyperbolisch.

Beispiel 2. *(Prüfung HS 2015)* Beweisen oder widerlegen Sie :

Die PDE
$$xf_{xx} + 3y^2 f_x + yf_{yy} = 0$$
ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch.

Lsg. Ausgehend von der allgemeinen Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

man findet
$$A = x,\ B = 0,\ C = y$$
das heisst
$$AC - B^2 = xy$$
Es sollte $xy > 0$ gelten; das gilt offensichtlich nicht für alle zweidimensionale Vektoren.

Beispiel 3. Finden Sie die allgemeine Lösung folgende partielle Differentialgleichung:

$$u_x = xyu$$

Lsg. Da keine Ableitung nach y vorkommt:

$$\frac{du}{dx} = xyu$$
$$\int \frac{du}{u} = y \int x dx$$
$$\ln(u) = \frac{x^2 y}{2} + c(y)$$
$$\Rightarrow u(x, y) = d(y) e^{\frac{x^2 y}{2}}$$

Beispiel 4. Gegeben sei

$$u(x,t) = (x+ct)^2$$

u ist die Lösung einer bekannte PDE, welche?

Lsg. Man berechnet zuerst die Ableitungen die nützlich sind in den bekannten PDEs:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + 2ct \\ u_{xx} &= 2 \\ u_t &= 2xc + 2c^2 t \\ u_{tt} &= 2c^2 \end{aligned}$$

Diese einfache Berechnungen zeigen dass u die Gleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

erfüllt, und deshalb Lösung einer **Wellengleichung** ist.

Beispiel 5. Finden Sie die allgemeine Lösung folgende partielle Differentialgleichung:

$$u_{xy} = u_x$$

Lsg. Viele Lösungsswege sind hier möglich. Was man schnell und leicht machen kann ist eine Substitution durchzuführen: sei $u_x = v$. Man erhält die Gleichung

$$v_y = v$$

Diese Gleichung ist jetzt **separierbar** und man kann die mit den Methoden von Analysis I/II lösen:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v} &= \int 1 dy \\ \ln(v) &= y + c(x) \\ v(x,y) &= e^{y+c_1(x)} \\ &= c_2(x) e^y \end{aligned}$$

Es folgt dass die gesuchte Funktion ist

$$u(x,y) = e^y \int c_2(x) dx + c_3(y) = e^y c_4(x) + c_3(y)$$

Beispiel 6. Sei $v(x,y) = g(y^2 + x)$, wo g eine beliebig differenzierbare Funktion ist.

(a) Zeigen Sie dass $v_y - 2yv_x = 0$.

(b) Finden Sie eine Partikuläre Lösung so dass $v(x,0) = e^x$ ist.

Lsg.

(a)

Sei $s = y^2 + x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v_x &= g' \cdot 1 = g' \\ v_y &= g' \cdot 2y \\ \Rightarrow v_y - 2yv_x &= 0. \end{aligned}$$

(b)

$$v(x,0) = g(x) = e^x$$

Das heisst

$$v(x,y) = g(y^2 + x) = e^{y^2 + x}$$