Übung 8: Wellengleichung, Separation der Variablen

8.1 Die Wellengleichung

Die **Wellengleichung** ist eine PDE und ist gegeben durch

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \Rightarrow \textbf{Randbedingungen (RB)} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \Rightarrow \textbf{Anfangswert(AW)} \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \Rightarrow \textbf{Anfangswert(AW)} \end{cases}$$

Dieser PDE beschreibt die Auslenckung einer schwingender Saite, welche zur Zeit $t = 0$ zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Zur Zeit $t = 0$ hat sie die Form $f(x)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $g(x)$. Die Welle breitet sich mit Geschwindigkeit c aus.

8.2 Lösung der Gleichung

Die Lösung dieser Gleichung kann durch drei Schritte berechnet werden:

1. Separation der Variablen.
2. Fallunterscheidung der Lösungen (*many solutions*).
3. Lösungen durch Fourier-Reihen zusammensetzen.

8.2.1 Separation der Variablen

Bemerkung. Hier benutze ich folgender Notation: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ und $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$

Man nimmt an dass die Lösung der PDE die Form

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

besitzt. Man kann das in der PDE einsetzen. Es lohnt sich zuerst ein paar Berechnungen Separat durchzuführen:

$$u_{tt} = F\ddot{G}$$

und

$$u_{xx} = F''G$$

Durch Einsetzen erhält man

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

oder

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

Hier ist sehr wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite der Gleichung von t unabhängig ist und die linke Seite der Gleichung von x unabhängig ist. Das ist der Hauptgrund für die Wahl dieser Lösung! Von hier folgt dass

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

wobei k eine Konstante die weder von t noch von x abhängt. Man kann das in ein Gleichungssystem umschreiben, nähmlich

$$\begin{cases} F'' &= kF \\ \ddot{G} &= c^2 kG \end{cases}$$

Man kann jetzt die **Randbedingungen** benutzen:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$
$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \Rightarrow F(L) = 0$$

8.2.2 Fallunterscheidung: *many solutions*

Man versucht die erste Gleichung zu lösen:

$$F'' = kF, \; F(0) = F(L) = 0$$

Die Fallunterscheidung lautet:

$k = 0$: Die Gleichung wird zu

$$F'' = 0$$

und die Lösung lautet

$$F(x) = Ax + B, \; A, B \in \mathbb{R}$$

Mit den Randbedingungen sieht man leicht dass $F(x) = 0$ sein muss.

$k < 0$: Aus den Kurs Analysis I/II kennt man eine solche Lösung:

$$F(x) = C\cos(\sqrt{-k}x) + D\sin(\sqrt{-k}x)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$F(0) \overset{!}{=} 0 = C$$
$$F(L) = D\sin(\sqrt{-k}L) \overset{!}{=} 0$$

Die zweite Bedingung sagt entweder:

- $D = 0$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $\sin(\sqrt{-k}L) = 0$. Das heisst $\sqrt{-k}L \overset{!}{=} n\pi$ oder besser $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{L}$. Es folgt

$$F_n(x) = D \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$k > 0$: Aus den Kurs Analysis I/II kennt man eine solche Lösung:

$$F(x) = Ee^{\sqrt{k}x} + Ie^{-\sqrt{k}x}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$F(0) \overset{!}{=} 0 = E + I$$
$$F(L) \overset{!}{=} 0 = Ee^{\sqrt{k}L} + Ie^{-\sqrt{k}L}$$

Die erste Randbedingung sagt: $E = -I$. Eingesetzt in die zweite Randbedingung liefert:

$$\begin{aligned} F(L) \overset{!}{=} 0 &= Ee^{\sqrt{k}L} + Ie^{-\sqrt{k}L} \\ &= E(e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L}) \end{aligned}$$

Das sagt uns entweder:

- $E = 0 = I$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L} = 0$ oder besser $2\sinh(\sqrt{k}L) = 0$ das **nie möglich** ist, weil $k > 0$.

Was also am Ende wir gefunden haben, ist dass $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{L}$ oder besser

$$k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Falls jetzt man das in der zweite Gleichung einsetzt, es folgt

$$\ddot{G} = -c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G$$

Man kann dass mit den Kenntnissen aus Analysis I/II lösen und finden:

$$G_n(t) = B_n \cos(\frac{cn\pi}{L}t) + B_n^* \sin(\frac{cn\pi}{L}t)$$

oder

$$G_n(t) = B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)$$

wobei $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$.
Nach diesen langen Berechnungen man kann alles was gefunden ist zusammensetzen.
Da $u(x,t) = F(x)G(t)$ sein muss, gilt es

$$u_n(x,t) = (B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Mit dem Superpositionsprinzip kann man die Lösung für alle n schreiben, nähmlich:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

8.2.3 Zusammensetzung der Lösung mit den Fourier-Reihen

Man kann jetzt die Anfangswerte benutzen:

- $f(x)$:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

wobei f ungerade fortgesetzt werden kann und also B_n als Koeffizient der Fourier-Reihe von $f(x)$ berechnen kann:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

- $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) = u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n B_n \sin(\lambda_n t) + \lambda_n B_n^* \cos(\lambda_n t))\sin(\frac{n\pi}{L}x)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin(\frac{n\pi}{L}x) \end{aligned}$$

Man kann ähnlicherweise B_n^* berechnen:

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

Bemerkung. Ich habe diese Lösung nicht nur um präzis zu sein komplett hergeleitet: man wird sie nicht für alle Aufgaben schreiben, **ABER** man muss sie verstanden haben um ihre Resultate (einfache Koeffizientenberechnungen) anzuwenden. Es kann sein dass an der Prüfung eine solche Herleitung gefragt wird und es lohnt sich dieses Mechanismus im Kopf zu halten!

8.3 Beispiele

Beispiel 1. Man findet die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lsg. Was man schon bemerken kann, sind die verschiedene Elemente der Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= 1, \\ L &= 1, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L} = n\pi, \\ f(x) &= x, \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Man kann also die Lösung schreiben: man beginnt mit dem ersten Anfangswert:

$$u(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$$

Mit den hergeleiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \\ &= 2\left(-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right) \\ &= 2\left(-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right)\Big|_0^1 \\ &= -2\frac{(-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

Mit dem zweiten Anfangswert folgt

$$g(x) = 0 \Rightarrow B_n^* = 0 \ \forall n \geq 1$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2\frac{(-1)^n}{n\pi}\cos(n\pi t)\right)\cdot \sin(n\pi x)$$

Beispiel 2. Man findet die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lsg. Was man schon bemerken kann, sind die verschiedene Elemente der Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= 1, \\ L &= 1, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L} = n\pi, \\ f(x) &= k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right), \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Man kann also die Lösung schreiben: man beginnt mit dem ersten Anfangswert:

$$u(x,0) = k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$$

Anstatt die Koeffizienten mit den hergeleiteten Gleichungen wie gewohnt zu berechnen, man kann schlauer sein: die Fourier-Reihe Darstellung impliziert eine lineare Kombination von Sinusfunktionen. Man kann also ganz einfach ein **Koeffizientenvergleich** durchführen:

$$k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$$

Man kann einfach ablesen, dass:

$$B_1 = k, \;\; B_3 = -\frac{k}{3}, \;\; B_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$$

Mit dem zweiten Anfangswert folgt

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n^* \sin(n\pi x) = 0 \Rightarrow B_n^* = 0 \; \forall n \geq 1$$

und somit ist die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = k \cdot \left(\cos(\pi t)\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)\right)$$

Beispiel 3. Man findet die Lösung der PDE

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Lsg. Diese Gleichung hat leider nicht die Form einer Wellengleichung, also man kann nicht die hergeleitete Formel benutzen. Man hat aber heute ein neues Vorgehen gelernt: Seperation der Variablen. Man nimmt an $u(x,t) = F(x)G(t)$. Man kann das in der Gleichung einsetzen und man erhält (vergleichen mit **8.2**)

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Man bekommt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \dot{G} = kG \end{cases}$$

Man kann jetzt die Fallunterscheidung durchführen:

$k = 0$: Das Gleichungssystem wird zu

$$\begin{cases} F'' = 0 \Rightarrow F(x) = Ax + B \\ \dot{G} = 0 \Rightarrow G(t) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

falls man die Randbedingungen einsetzt:

$$u(0,t) = F(0) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$
$$u(1,t) = F(1) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$

In allen Fällen gilt

$$u(x,t) = 0$$

$k < 0$: Aus den Kurs Analysis I/II man kennt einer solche Lösung:

$$F(x) = C\cos(\sqrt{-k}x) + D\sin(\sqrt{-k}x)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$F(0) \stackrel{!}{=} 0 = C$$
$$F(L) = D\sin(\sqrt{-k}L) \stackrel{!}{=} 0$$

Die zweite Bedingung sagt entweder:

- $D = 0$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $\sin(\sqrt{-k}) = 0$. Das heisst $\sqrt{-k} \stackrel{!}{=} n\pi$ oder auch $k = -(n\pi)^2$. Es folgt

$$F_n(x) = D \cdot \sin(n\pi x)$$

$k > 0$: Aus den Kurs Analysis I/II man kennt einer solche Lösung:

$$F(x) = Ee^{\sqrt{k}x} + Ie^{-\sqrt{k}x}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} F(0) &\overset{!}{=} 0 = E + I \\ F(1) &\overset{!}{=} 0 = Ee^{\sqrt{k}} + Ie^{-\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Die erste Randbedingung sagt: $E = -I$. Eingesetzt in die zweite Randbedingung liefert:

$$\begin{aligned} F(1) \overset{!}{=} 0 &= Ee^{\sqrt{k}} + Ie^{-\sqrt{k}} \\ &= E(e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}}) \end{aligned}$$

Das sagt uns entweder:

- $E = 0 = I$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}} = 0$ oder besser $2\sinh(\sqrt{k}) = 0$ das **nie möglich** ist, weil $k > 0$.

Da für $k > 0$ und $k = 0$ hat man $F(x) = 0$ gekriegt, muss man nicht $G(t)$ für diese Fälle betrachten! (Erinnerung: $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$) Für $k < 0$ hat man

$$G(t) = S \cdot e^{kt} = S \cdot e^{-(n\pi)^2 t}$$

Die allgemeine Lösung kann jetzt mit dem **Superpositionsprinzip** geschrieben werden:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D \cdot S \cdot e^{-(n\pi)^2 t} \cdot \sin(n\pi x)$$