Übung 13: Mittelwertsatz und Maximumsprinzip

13.1 Harmonische Funktionen

Funktionen die die *Poisson* Gleichung

$$\Delta u = 0$$

erfüllen, sind **harmonische** Funktionen genannt. Für alle harmonische Funktionen gelten wichtige Eigenschaften: ohne die allgemeine Lösung u des Problems zu kennen, kann man Aussagen über spezielle Werte der Lösungsfunktion machen. Diese Eigenschaft kann in dem **Maximumsprinzip** und in dem **Mittelwertsatz** übersetzt werden.

13.2 Maximumsprinzip

Im Innern des Gebiets S nimmt eine harmonische Funktion ihr Minimum und ihr Maximum nie an, ausser wenn sie *konstant* ist. Das heisst dass die Funktion nimmt Maximum und Minimum immer auf dem *Rand* δS an.

13.3 Mittelwertsatz

Sei u eine harmonische Funktion auf dem Gebiet S, (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt in S und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass ein Kreis mit Radius α und Mittelpunkt (x_0, y_0) vollständig in S liegt. Dann gilt folgendes: eine harmonische Funktion ist an jedem beliebigen Punkt (x_0, y_0) gleich dem Mittelwert auf jedem beliebigen Kreis um diesen Punkt.

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + \alpha \cos(\phi), y_0 + \alpha \sin(\phi)) d\phi$$

Auf dem Rand es gilt

$$u(0, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

wobei $f(t)$ in jedes Problem anders definiert ist.

13.4 Well-posed and ill-posed Probleme

Die Lösungen von Differentialgleichungen verhalten sich ziemlich gut: man kann die Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems und ihre Abhängigkekit von der Anfangsbedingungen beweisen. Man kann nicht immer das auch für Partielle Differentialgleichungen sagen! Wir nennen ein Problem **well-posed** falls:

- *Existence*: Das Problem hat eine Lösung.
- *Uniqueness*: Die Lösung ist eindeutig.
- *Stability*: Die Lösung ist von Anfangsbedingungen und Randbedingungen abhängig

Bemerkung. Falls eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, wie nennen das Problem **ill-posed**.

13.5 PDEs mit Laplace Transform lösen

Dieser Methode wird normalerweise nicht besprochen: es ist aber ein ziemlich gutes Tool um besondere PDEs zu lösen. Die Idee des Verfahren ist ähnlich zur Methode mit den Fourier Transformationen. Falls man eine Partielle Differentialgleichung zu lösen hat, muss man:

Vorgehen

(I) Laplace Transform $\mathscr{L}$ in t auf beiden Seiten der PDE anwenden.

(II) Ableitungsregeln, Anfangsbedingungen und $\mathscr{L}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{L}(u)$ benutzen, um eine ODE zu bekommen.

(III) ODE mit Randbedingungen lösen.

(IV) Inverse Laplace Transform $\mathscr{L}^{-1}$ auf beiden Seiten anwenden.

Bemerkung. In Schritt (II) habe ich denselben Trick wir für Fourier-Transform benutzen haben benutzt: für $\mathscr{L}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{L}(u)$ hat man

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(u_x(x,t)) &= \int_0^\infty u_x(x,t)e^{-st}dt\\ &= \frac{d}{dx}\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt\\ &= \frac{d}{dx}\mathscr{L}(u)\end{aligned}$$

13.6 Beispiele

Beispiel 1. Lösen das Problem

$$\begin{cases} u_{xx} = 100u_{tt} + 100u_t + 25u \\ u(0,t) = \sin(t),\ \text{Randbedingung} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ \text{Anfangsbedingung} \end{cases}$$

mit der Laplace-Transform. Die Lösung muss für alle positive x beschränkt sein.

Lsg. Man wendet die Laplace-Transform auf beiden Seiten an: mit der Ableitungsregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}U&\\ &= 100s^2U - 100sU + 25U\\ &= (10s+5)^2U\end{aligned}$$

Aus Analysis I/II folgt

$$U(x,s) = C_1(s)e^{-(10s+5)x} + C_2(s)e^{(10s+5)x}$$

Da die Lösung muss für alle positive x beschränkt sein, setzt man $C_2(s) = 0$. Für die Randbedingung gilt

$$\begin{aligned}U(0,s) &= \mathscr{L}(u(0,t))\\ &= \frac{1}{s^2+1}\\ &= C_1(s)\end{aligned}$$

Das heisst

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2+1} e^{-(10s+5)x}$$

Man wendet die Inverse Laplace Transform an und erhählt

$$u(x,t) = e^{-5x} \sin(t-10x) u(t-10x).$$

Beispiel 2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x - 1$ für $0 < x < \pi$

(a) Bestimmen Sie die ungerade Fortsetzung f_u von f zu einer 2π-periodischen Funktion.

Lsg. Aus ersten Teil des Semesters erkennt man dass

$$f_u = \begin{cases} -e^{-x}+1, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f_u.

Lsg. Für die Koeffizienten hat man wegen ungerade Fortsetzung $a_0 = a_n = 0$. Für b_n es gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_u(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (e^x - 1) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^x - 1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^x - 1}{n} (-1)^n + \frac{1}{n(n^2+1)} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)} \right) \end{aligned}$$

wobei ich benutzt habe, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx &= \frac{e^x}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx \\ &= \frac{e^x}{n^3} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^3} \int_0^{pi} e^x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n^3} (e^{\pi}(-1)^n - 1) - \frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{1}{n^3} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{1}{n(n^2+1)} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Berechnungen ergibt sich

$$f_u(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)} \right) \sin(nx)$$

(c) Lösen Sie nun für $t > 0$ die PDE

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f_u(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Lsg. Die allgemein Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist in diesem Fall

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)e^{-c^2n^2t}$$

und die Anfangsbedingung und Teilaufgabe **b)** liefern

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_u(x) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n(n^2+1)}-\frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist folglich

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n(n^2+1)}-\frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx)e^{-c^2n^2t}.$$