Aufgabensammlung des Skriptes

1 Rekapitulation aus Analysis I/II

Aufgabe 1. Man löse $\int \ln(x)dx$:

Lsg. Man kann es umschreiben und man bekommt:

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot ln(x) - x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2. Man löst $\int \cos^2(x)dx$

Lsg.

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)dx = \int \cos(x)\cdot\cos(x)dx &= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int \sin^2(x)dx \\ &= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int [1-\cos^2(x)]dx \\ &= \sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx\end{aligned}$$

Jetzt hat man eine einfache Gleichung: falls man erste und letzte Term berücksichtigt:

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx$$

das heisst

$$2\cdot\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cdot\cos(x) + x \Longrightarrow \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\cdot[x+\sin(x)\cdot\cos(x)] + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Aufgabe 3. Vereinfachen Sie $\frac{5x^2-2}{x(x+1)^2}$:

Lsg. Grad von Zähler ist 2, Grad von Nenner ist 3, das heisst wir müssen keine Polynomdivision durchführen:

$$\frac{5x^2-2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Es folgt

$$5x^2 - 2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

Man kann das in ein einfaches LGS mit Koeffizientenvergleich umschreiben:

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ 2A + B + C &= 0 \\ A &= -2 \end{aligned}$$

Das liefert $A = -2$, $B = 7$ und $C = -3$ und somit

$$\frac{5x^2-2}{x(x+1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{7}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 4. Man löse die lineare Differentialgleichung

$$16y''(x - 24y'(x) + 9y(x) = 0$$

Lsg. Mit dem Ansatz folgt einfach das Polynom

$$16\lambda^2 - 24\lambda + 9 = (4\lambda - 3)^2 = 0$$

Es folgt $\lambda_{1,2} = \frac{3}{4}$ und also

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\frac{3}{4}x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\frac{3}{4}x}$$

2 Laplace Analysis

Aufgabe 5. Gegeben sei $f(t) = \cos(\omega t)$. Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$.

Lsg. Obwohl die Laplace Transform von $\cos(\omega t)$ normalerweise bekannt ist, versucht hier man sie mit der Definition der Transform zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\cos(\omega t)) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos(\omega t)dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-st}\cos(\omega t)\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\sin(\omega t)\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(\omega t)dt\right) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathscr{L}(\cos(\omega t))
\end{aligned}$$

Durch Lösen der Gleichung folgt

$$\mathscr{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Bemerkung. Es ist sehr wichtig die Berechnung mit der Definition zu kennen! Es werden oft (auch in anderen Vorlesungen wie z.B. RTI) einfach Tabellen mit bekannten Transforms benutzt: man muss aber wissen woher kommen diese und wieso sie so aussehen!

Aufgabe 6. Gegeben sei

$$f(t) = \begin{cases} t & ,0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ,t > 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$

Lsg.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f(t)) = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^\infty 0 dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{s} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 \right) \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Gegeben sei $f(t) = t^3 - 2t + 8$. Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$.

Lsg. Mit der bekannte Laplace Transform (b) und mit der Linearitätseigenschaft, man kann die einzelne Terme berechnen und sie dann zusammenaddieren:

$$\mathscr{L}(t^3 - 2t + 8) = \mathscr{L}(t^3) - 2\mathscr{L}(t) + 8\mathscr{L}(1) = \frac{3!}{s^4} - \frac{2!}{s^2} + 8\frac{0!}{s} = \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s}$$

Aufgabe 8. Gegeben sei $f(t) = (2t - 3)^2$. Berechnen Sie $\mathscr{L}(f(t))$.

Lsg.

$$\mathscr{L}((2t-3)^2) = \mathscr{L}(4t^2-12t+9) = 4\mathscr{L}(t^2)-12\mathscr{L}(t)+9\mathscr{L}(1) = 4\frac{2!}{s^3}-12\frac{1!}{s^2}+9\frac{0!}{s} = \frac{8}{s^3}-\frac{12}{s^2}+\frac{9}{s}$$

Aufgabe 9. Gegeben sei $F(s) = \frac{s}{s^2-1}$. Finden Sie $f(t)$.

Lsg. Wie gesagt, es gibt keine allgemeine Methode um die Inverse Laplace Transform zu finden. Was aber man machen kann, ist eine günstigere und einfachere erkennbare Form erreichen:

$$F(s) = \frac{s}{s^2-1} = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

Mit Partialbruchzerlegung schreibt man

$$\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

Es folgt

$$As + A + Bs - B \overset{!}{=} s \Longrightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

Das heisst

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)$$

Es gilt

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)) = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s-1}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1})\right)$$

Man kann mit der zweite bekannte Transform einfach ablesen, dass

$$\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s-1}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1})\right) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \cosh(t)$$

Aufgabe 10. Was ist die Laplace Transform von $h(t) = 5t^2e^{-2t}$?

Lsg. Man muss s-shifting benutzen, d.h. man muss die Konstante a und die Funktion f identifizieren. In diesem Fall sind

$$f(t) = 5t^2,\ a = -2$$

Mit dem Theorem folgt

$$F(s) = \mathscr{L}(5t^2) = 5\mathscr{L}(t^2) = \frac{10}{s^3}$$

und

$$H(s) = F(s-a) = F(s+2) = \frac{10}{(s+2)^3}$$

Aufgabe 11. Was ist die Inverse Laplace Transform von $G(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{5}{4}}$?

Lsg. Man muss zuerst versuchen, eine bessere Form zu erreichen: um s-shifting zu benutzen es ist oft nützlich eine bekannte Transformation zu verwenden. Hier haben wir im Zäler ein Term mit s und im Nenner ein Term mit s^2, d.h. man kann versuchen das mit $\mathscr{L}(\cos(at)) = \frac{s}{\alpha^2+s^2}$ darzustellen. Da im Zäler $s + \frac{1}{2}$ steht, versucht man das auch im Nenner im quadrat zu haben:

$$G(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+\frac{5}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+1^2}$$

Man kann einfach ablesen, dass

$$f(t) = \cos(\alpha t),\ a = -\frac{1}{2},\ \alpha = 1$$

Es folgt

$$G(t) = e^{at}f(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos(t)$$

Aufgabe 12. Bestimmen Sie mit der Ableitungsregel die Laplace Transform von $f(t) = t\cos(2t)$.

Lsg. Man muss die erste zwei Ableitungen von $f(t)$ berechnen und $f(t), f'(t)$ in 0 berechnen:

$$f(t) = t\cos(2t),\ \ f(0) = 0$$

$$f'(t) = \cos(2t) - 2t\sin(2t),\ \ f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -2\sin(2t) - 2\sin(2t) - 4\underbrace{t\cos(2t)}_{f(t)} = -4\sin(2t) - 4f(t)$$

Durch Einsetzen erhält man

$$f(t) = -\frac{f''(t)}{4} - \sin(2t)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) &= -\frac{1}{4}\mathscr{L}(f''(t)) - \mathscr{L}(\sin(2t)) \\
&= -\frac{1}{4}\left(s^2\mathscr{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)\right) - \mathscr{L}(\sin(2t)) \\
&= -\frac{1}{4}s^2\mathscr{L}(f(t)) + \frac{1}{4} - \frac{2}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Man löst diese Gleichung und erhält

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{s^2-4}{(4+s^2)^2}$$

Aufgabe 13. *Prüfungsaufgabe HS 2015*

Finden Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$f(t) = \cos(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Lsg. Man kann die Linearität der Transformation benutzen und die Integralregel benutzen. Man transformiert beide Seiten der Gleichung, es gilt:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f(t)) &= \mathscr{L}(\cos(t)) + \mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{\mathscr{L}(f(t))}{s}\end{aligned}$$

Man kann jetzt auf $\mathscr{L}(f(t))$ lösen:

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$\frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right)$$

Falls man das rücktransformiert, man erhält

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^t$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die Inverse Laplace Transform von $F(s) = \frac{1-e^{2s}}{s^2+4}$

Lsg. Man vereinfacht:

$$F(s) = \frac{1-e^{2s}}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4} - \frac{e^{2s}}{s^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{2e^{2s}}{s^2+2^2}\right)$$

Mit t-shifting folgt

$$F(s) = \mathscr{L}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}u(t+2)\sin(2(t+2))\right)$$

Das heisst

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}u(t+2)\sin(2(t+2))$$

Aufgabe 15. Löse das Anfangswertproblem $\begin{cases} y' - 5y = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ für $f(t) = \begin{cases} 3e^t, \ 0 < t < 2 \\ 0, \ t > 2 \end{cases}$

Lsg. Wie kann man arbeiten mit so eine definierter Funktion? In diesem Typ von Problemen, versucht man die Funktion durch die heavyside Funktion u auszudrücken. In diesem Fall ist

$$f(t) = 3e^t - 3e^t u(t-2)$$

Man wendet die Kochrezept an: man findet die Laplace Transform der linke Seite der Differentialgleichung

$$\mathscr{L}(y' - 5y) = \mathscr{L}(y') - \mathscr{L}(5y) = sY - y(0) - 5Y = (s-5)Y - 1$$

Dieselbe Prozedur wird rechts durchgeführt:

$$\mathscr{L}\left(3e^t - 3e^t u(t-2)\right) = 3\mathscr{L}(e^t) - 3\mathscr{L}\left(e^t u(t-2)\right) = \frac{3}{s-1} - 3\mathscr{L}\left(e^2 e^{t-2} u(t-2)\right) = \frac{3}{s-1} - \frac{3e^{2-2s}}{s-1}$$

Man löst jetzt auf $Y(s)$ und bekommt

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s-5)} - \frac{3e^{2(1-s)}}{(s-1)(s-5)} + \frac{1}{(s-5)}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$Y(s) = -\frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-5} + \frac{3}{4}e^2\left(\frac{e^{-2s}}{s-1} - \frac{e^{-2s}}{s-5}\right) + \frac{1}{s-5}$$

Man wendet $\mathscr{L}^{-1}$ auf beiden Seiten und erhält

$$y(t) = -\frac{3}{4}(e^t - e^{5t} - e^2\left(u(t-2)e^{t-2} - u(t-2)e^{5(t-2)}\right)) + e^{5t}$$

Aufgabe 16. Man betrachtet die Integralgleichung

$$y(t) - \cos(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

Bestimme $y(t)$.

Lsg. Man beachte zuerst (aus Faltungssatz), dass

$$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = y(t) * \cos(t)$$

Wie gewohnt, man wendet auf beide Seiten der Gleichung Laplace an:

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathscr{L}(y(t))}_{Y(s)} - \mathscr{L}(\cos(t)) &= \mathscr{L}(y(t) * \cos(t)) \\ &= \underbrace{\mathscr{L}(y(t))}_{Y(s)} \cdot \mathscr{L}(\cos(t))\end{aligned}$$

Durch einfaches Umformen

$$\begin{aligned}Y(s) \cdot (1 - \mathscr{L}(\cos(t)) &= \mathscr{L}(\cos(t)) \\ Y(s) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{s}{s^2+1}\right)}_{\frac{s^2-s+1}{s^2+1}} &= \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}Y(s) = \frac{s}{s^2-s+1} &= \frac{s}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ &= \mathscr{L}\left(e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; y(t) = e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Aufgabe 17. *Prüfungsaufgabe HS 2016*

Finden Sie mit Hilfe der Laplacetransform die Lösung der Integralgleichung

$$6f(t) = 2t^3 + \int_0^t (t-\tau)^3 f(\tau) d\tau$$

Mit Laplacetransform und Faltungssatz folgt

$$\begin{aligned} 6\mathscr{L}(f(t)) &= 2\mathscr{L}(t^3) + \mathscr{L}(t^3 * f(t)) \\ &= 2\mathscr{L}(t^3) + \mathscr{L}(t^3)\mathscr{L}(f(t)) \end{aligned}$$

Es gilt jetzt

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(f(t)) \cdot (6 - \mathscr{L}(t^3)) = 2\mathscr{L}(t^3) \\ &\Rightarrow \mathscr{L}(f(t)) \cdot \left(\frac{6(s^4-1)}{s^4}\right) = \frac{12}{s^4} \\ &\Rightarrow \mathscr{L}(f(t)) = \frac{2}{s^4-1} = \frac{2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt

$$\frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

und

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 0,\ D = -1$$

Es folgt

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) - \sin(t)$$

Aufgabe 18. Finde die Laplace Transform von $f(t) = t^2 \sin(2t)$.

Lsg. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(t^2 \sin(2t)) &= \mathscr{L}(t \cdot t \sin(2t)) \\
&= -\mathscr{L}'(t \sin(2t)) \\
&= -(-\mathscr{L}''(\sin(2t)) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathscr{L}(\sin(2t))\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{2}{s^2+4}\right) \\
&= 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{-2s}{(s^2+4)^2}\right) \\
&= \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Berechne die Inverse Laplace Transform von $\frac{4}{(s-2)^2}$ mit der Differentiationsregel.

Lsg. Man muss hier schalu sein und versuchen was man schon kennt zu benutzen: man hat im Nenner $(s-2)^2$. Die einzige Funktion deren Laplace Transform $(s-2)$ im Nenner hat ist e^{2t}, d.h.

$$\mathscr{L}(e^{2t}) = \frac{1}{(s-2)}$$

Man braucht aber $(s-2)^2$: Differentiationsregel enthält eine Ableitung, hier z.B.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathscr{L}(e^{2t})\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) = -\frac{1}{(s-2)^2}$$

das heisst

$$\frac{4}{(s-2)^2} = -4 \cdot \mathscr{L}'(e^{2t})$$

und

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s-2)^2}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(-4 \cdot \mathscr{L}'(e^{2t})\right) = 4 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left(-\mathscr{L}'(e^{2t})\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} 4 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left(\mathscr{L}(te^{2t})\right) = 4te^{2t}$$

Aufgabe 20. Berechne die Inverse Laplace Transform von $\frac{4}{(s-2)^2}$ mit der Integrationsregel.

Lsg. Da man $F(s) = \frac{4}{(s-2)^2}$ schon kennt, kann man die Integrationsregel direkt als Gleichung anwenden:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\frac{f(t)}{t}) = \int_s^\infty \mathscr{L}(f)(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma \\
&= \int_s^\infty \frac{4}{(\sigma-2)^2}d\sigma \\
&= -4\int_s^\infty \left(\frac{1}{(\sigma-2)}\right)' d\sigma \\
&= -4\left(\frac{1}{(\sigma-2)}\right)\Big|_s^\infty \\
&= \frac{4}{s-2}
\end{aligned}$$

Das resultiert in einer Gleichung:

$$\mathscr{L}(\frac{f(t)}{t}) = \frac{4}{s-2}$$

Man wendet $\mathscr{L}^{-1}$ beidseitig und erhält

$$\frac{f(t)}{t} = 4 \cdot \mathscr{L}\left(\frac{1}{s-2}\right) = 4e^{2t} \Rightarrow f(t) = 4te^{2t}$$

3 Fourier Analysis

Aufgabe 21. Skizziere den Graphik von $f(x) = |\cos(x)|,\ -\pi < x < \pi$.

Lsg.

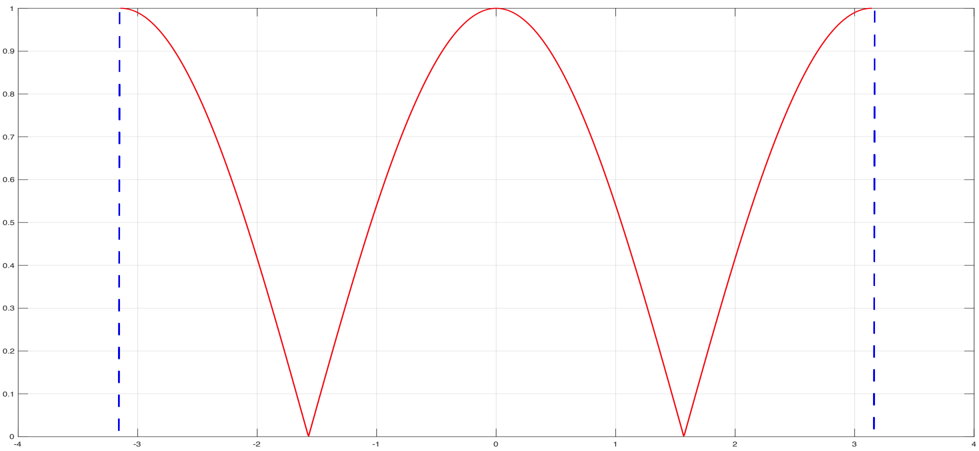

Figure 1: $f(x) = |\cos(x)|,\ -\pi < x < \pi$

Aufgabe 22. Bestimme die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = \pi - x$ wenn $-\pi < x < \pi$ und die Periodizität 2π ist.

Lsg.

Man folgt die Kochrezept:

(I) Die Funktion ist 2π periodisch, d.h. $2\pi = 2L$ und also $L = \pi$.

(II) Man berechnet die Koeffizienten: es gilt

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \pi \\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos(mx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(mx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(mx)\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{m}\sin(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0,\ m\in\mathbb{N}} - \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\frac{x\sin(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0,\ m\in\mathbb{N}} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(mx)}{m}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(mx)}{m}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi m^2}\cos(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi m^2}\left((-1)^m - (-1)^m\right) \\
&= 0 \\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin(mx)\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin(mx)\,dx}_{=0,\ wie\ oben} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(mx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(mx)}{m}dx\right] \\
&= \frac{2}{m}\cos(m\pi) \\
&= \frac{2}{m}(-1)^m
\end{aligned}
$$

Es folgt mit der Definition von Fourier-Reihe, dass

(III)

$$
f(x) = \pi - x = \pi + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{m}(-1)^m\right)\sin(mx)
$$

Aufgabe 23. Betrachte die 2π-periodische Funtkion $f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < \pi < x \end{cases}$.
$f(x)$ ist nicht definiert in $x = -\pi, 0, \pi$. Wie muss man $f(x)$ an diesen Stellen definieren, so dass die Fourierreihe für $-\pi \leq x \leq \pi$ gegen $f(x)$ konvergiert?

Lsg.

$x_0 = -\pi$:

$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(-\pi + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi - \varepsilon - \pi) = 0 \\ f(x_0^-) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{f(-\pi - \varepsilon)}_{=f(-\pi-\varepsilon+2\pi)=f(\pi-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi - \varepsilon) = \pi \end{aligned}$$

Damit die Fourier-Reihe gegen $f(x)$ konvergiert muss die Funktion in allen Unstetigkeitsstellen gegen

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

konvergieren. Hier gilt

$$\frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

$x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 0 \\ f(x_0^-) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(-\varepsilon) = -\pi \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2}(0 - \pi) = -\frac{\pi}{2}$$

$x_0 = \pi$:

$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{f(\pi + \varepsilon)}_{=f(\pi+\varepsilon-2\pi)=f(-\pi+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi - \varepsilon - \pi) = 0 \\ f(x_0^-) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(\pi - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi - \varepsilon) = \pi \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

Es reicht jetzt, die Funktion zu definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = -\pi \\ -\pi - x & -\pi < x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \\ x & 0 < \pi < x \\ \frac{\pi}{2} & x = \pi \end{cases}$$

Aufgabe 24. Prüfe die Parität von $f(x) = (x^2+3)^7$ und $g(x) = e^{\sin(x)}$.

Lsg. Aufgrund der Quadrat, ist $f(x) = f(-x)$, das heisst f ist eine **gerade** Funktion.
Für $g(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} g(-x) = e^{\sin(-x)} = e^{-\sin(x)} &\neq -e^{-\sin(x)} = -g(-x) \\ &\neq e^{\sin(x)} = g(x) \end{aligned}$$

Das heisst g ist weder gerade noch ungerade.

Aufgabe 25. Gegeben ist $f(x) = -x + \pi$ auf $0 < x < \pi$. Gesucht ist die gerade Fortsetzung von f mit Periode 2π.

Lsg. Es muss gelten: $f(x) = f(-x) = -(-x) + \pi = x + \pi$ auf $-\pi < x < 0$. Das heisst

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < \pi \\ x + \pi, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 26. Gegeben ist $f(x) = x^2$ auf $0 < x < 2$. Gesucht ist die ungerade Fortsetzung von f mit Periode 4.

Lsg. Es muss gelten: $f(x) = -f(-x) = -x^2$ auf $-2 < x < 0$. Das heisst

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 2 \\ -x^2, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 27. Gegeben ist $f(x) = x$ auf $0 < x < 3$. Gesucht ist die gerade Fortsetzung von f mit Periode 4.

Lsg. Hier ist es nicht so einfach: man muss zuerst das Intervall anpassen.
Sei f_g die gesuchte Fortsetzung und da man Periode 4 haben muss $0 < x < 2$. Dann gilt

$$f_g(x) = f_g(-x) = f_g(-x+4) = -x+4$$

Das heisst

$$f_g(x) = \begin{cases} 4-x, & 0 < x < 2 \\ 4+x, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 28. Gegeben sei $f(x) = -x$ auf $-\pi < 0 < \pi$, 2π periodisch. Berechnen Sie ihre komplexe Fourier-Reihe und bringen Sie diese nachträglich auf die reelle Form.

Lsg. Man beginnt mit 2 wichtige Beobachtungen: $L = \pi$ und $f(-x) = x = -f(x)$, das heisst f ist ungerade. Man muss jetzt c_n berechnen:

$$\begin{aligned}
c_n &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{1}{in}xe^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left(\pi e^{-in\pi}+\pi e^{in\pi}\right)-\frac{1}{2\pi n^2}\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right) \\
&= \frac{1}{in}\cos(n\pi)-\underbrace{\frac{i}{\pi n^2}\sin(n\pi)}_{=0} \\
&= \frac{1}{in}\cos(n\pi) \\
&= \frac{(-1)^n}{in}
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{in}e^{inx}$$

Man kann jetzt die komplexe Koeffizienten in reellen Koeffizienten umwandeln:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_n = 0 \text{ da ungerade} \\
b_n &= i\cdot(c_n - c_{-n}) = i\cdot\left(\frac{(-1)^n}{in}-\frac{(-1)^{-n}}{in}\right) = \frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Man kann also schreiben

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

Aufgabe 29. Gegeben sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x), & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dass

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2} \cdot \cos(\omega x) d\omega$$

Lsg. Es sind hier Fourier-Integrale zu benutzen.
Die erste wichtige Beobachtung ist dass $f(x) = f(-x)$ (aus Eigenschaften von $\cos(x)$) und deswegen ist die Funktion *gerade*. Das bringt uns eine wichtige Information: $B(\omega) = 0$. Man kann jetzt $A(\omega)$ berechnen, es gilt:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}\cos(v)\cos(\omega v)dv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)\cos(\omega v)dv \\
&= \underbrace{\sin(v)\cos(\omega v)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\cos(\frac{\pi}{2}\omega)} + \omega\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(v)\sin(\omega v)dv \\
&= \cos(\frac{\pi}{2}\omega) + \left(\underbrace{-\omega\cos(v)\sin(\omega v)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \omega^2 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)\cos(\omega v)dv}_{=A(\omega)}\right)
\end{aligned}$$

Man hat also die Gleichung

$$A(\omega) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}$$

Nach Definition gilt

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega$$

das genau zeigt was gefragt war!

Aufgabe 30. Gegeben sei

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellen Sie diese Funktion als Fourier-Integral dar.

Lsg. Es gilt wiederum $f(x) = f(-x)$, das heisst $f(x)$ ist gerade und deshalb $B(\omega) = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (v-1)\cos(v\omega) dv \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (v-1)\cos(v\omega) dv \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 v\cos(v\omega) dv - \int_0^1 \cos(v\omega) dv \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{v}{\omega} \sin(v\omega)\Big|_0^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^1 \sin(v\omega) dv - \frac{1}{\omega} \sin(v\omega)\Big|_0^1 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{\cos(v\omega)}{\omega^2}\Big|_0^1 - \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(\omega) - 1}{\omega^2} \end{aligned}$$

Man muss noch die Spezialfälle analysieren: hier ist nur den Fall $\omega = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\omega \to 0} \frac{\cos(\omega) - 1}{\omega^2} \overset{\frac{0}{0} \to LH}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{\omega \to 0} \frac{-\sin(\omega)}{2\omega} \overset{\frac{0}{0} \to LH}{=} \frac{2}{\pi} \lim_{\omega \to 0} \frac{-\cos(\omega)}{2} = -\frac{1}{\pi}$$

Man kann also schreiben, dass

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\omega) - 1}{\omega^2} \cos(\omega x) dx$$

Aufgabe 31. Berechnen Sie die Fourier Transform von

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Lsg. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(v) e^{-i\omega v} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{iv} e^{-i\omega v}}_{e^{v(i-i\omega)}} dv + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{-iv} e^{-i\omega v}}_{e^{v(-i-i\omega)}} dv \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i-i\omega} e^{v(i-i\omega)} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{i+i\omega} e^{-v(i+i\omega)} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i-i\omega} \left(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} e^{-\frac{i\pi\omega}{2}} - \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i} e^{\frac{i\pi\omega}{2}} \right) - \frac{1}{i+i\omega} \left(\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i} e^{-\frac{i\pi\omega}{2}} - \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} e^{\frac{i\pi\omega}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{1-\omega} \cos(\frac{\omega\pi}{2}) + \frac{2}{1+\omega} \cos(\frac{\omega\pi}{2}) \right) \\
&= \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-\omega^2}
\end{aligned}$$

Man muss aber noch die kritische Fälle betrachten: $\omega = 1$ und $\omega = -1$.

- $\omega = 1$

$$\hat{f}(1) = \lim_{\omega \to 1} \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \overset{\frac{0}{0} \to LH}{=} \lim_{\omega \to 1} \frac{-\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\frac{\pi}{2}}{-2\omega} = \frac{-\pi}{-2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

- $\omega = -1$

$$\hat{f}(-1) = \lim_{\omega \to -1} \frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \overset{\frac{0}{0} \to LH}{=} \lim_{\omega \to -1} \frac{-\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\frac{\pi}{2}}{-2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Aufgabe 32. Sei f die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

(a) Finden Sie die Fouriertransform von $f(x)$

Lsg. Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-i\omega x} \\
&= -\frac{(1-x^2)}{i\omega\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{i\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1} xe^{-i\omega x}dx \\
&= -\frac{1}{i\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{x}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx\right) \\
&= -\frac{1}{i\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega}+e^{i\omega}) + \frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1}\right) \\
&= -\frac{1}{\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-i\omega}+e^{i\omega}) - \frac{1}{i\omega^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-i\omega}-e^{i\omega}) \\
&= -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\right)
\end{aligned}$$

Da im Nenner ω^3 steht, man muss den Fall $\omega = 0$ separat behandeln. Durch direktes Einsetzen findet man

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Alternativ kann man auch das mit einem Grenzwert lösen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\omega\to 0} -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\right) \\
&\overset{\frac{0}{0}\to LH}{=} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\omega)}{3\omega} \\
&\overset{\frac{0}{0}\to LH}{=} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\omega\to 0}\cos(\omega) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie anschliessend

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\frac{\omega}{2})d\omega$$

Lsg. Für die Inverse Fourier Transform gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}e^{i\omega x}d\omega \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\omega x)d\omega - \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\sin(\omega x)d\omega \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\omega x)d\omega
\end{aligned}$$

wobei ich im letzten Schritt verwendet habe, dass

$$\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\sin(\omega x)$$

eine ungerade Funktion ist: ein Integral einer ungerade Funktion auf symmetrisches Gebiets ist stets 0. Für $x=\frac{1}{2}$ erhalten wir auf der linken Seite

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{3}{4}$$

Für die rechte Seite es gilt

$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\frac{\omega}{2})d\omega=-\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\frac{\omega}{2})d\omega$$

und somit

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\frac{\omega}{2})d\omega=-\frac{3\pi}{16}$$

4 Partielle Differentialgleichungen (PDEs)

Aufgabe 33. *(Prüfung HS 2013)* Bestimmen Sie den Typ von

(a)

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + xu = 0$$

(b)

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_y = 0$$

(c)

$$u_{xx} + 8u_{xy} + 2u_{yy} + e^x u = 0$$

Lsg. Mit der allgemeine Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

kann man finden:

(a) $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, also $AC - B^2 = 0 \rightarrow$ parabolisch.

(b) $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$, also $AC - B^2 = 1 \rightarrow$ elliptisch.

(c) $A = 1$, $B = 4$, $C = 2$, also $AC - B^2 = -14 \rightarrow$ hyperbolisch.

Aufgabe 34. *(Prüfung HS 2015)* Beweisen oder widerlegen Sie :

Die PDE
$$xf_{xx} + 3y^2 f_x + yf_{yy} = 0$$
ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch.

Lsg. Ausgehend von der allgemeinen Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

man findet
$$A = x,\ B = 0,\ C = y$$
das heisst
$$AC - B^2 = xy$$
Es sollte $xy > 0$ gelten; das gilt offensichtlich nicht für alle zweidimensionale Vektoren.

Aufgabe 35. Finden Sie die allgemeine Lösung folgende partielle Differentialgleichung:

$$u_x = xyu$$

Lsg. Da keine Ableitung nach y vorkommt:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= xyu \\
\int \frac{du}{u} &= y \int x dx \\
\ln(u) &= \frac{x^2 y}{2} + c(y) \\
\Rightarrow u(x,y) &= d(y) e^{\frac{x^2 y}{2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 36. Gegeben sei

$$u(x,t) = (x+ct)^2$$

u ist die Lösung einer bekannte PDE, welche?

Lsg. Man berechnet zuerst die Ableitungen die nützlich sind in den bekannten PDEs:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + 2ct \\ u_{xx} &= 2 \\ u_t &= 2xc + 2c^2 t \\ u_{tt} &= 2c^2 \end{aligned}$$

Diese einfache Berechnungen zeigen dass u die Gleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

erfüllt, und deshalb Lösung einer **Wellengleichung** ist.

Aufgabe 37. Finden Sie die allgemeine Lösung folgende partielle Differentialgleichung:

$$u_{xy} = u_x$$

Lsg. Viele Lösungsswege sind hier möglich. Was man schnell und leicht machen kann ist eine Substitution durchzuführen: sei $u_x = v$. Man erhält die Gleichung

$$v_y = v$$

Diese Gleichung ist jetzt **separierbar** und man kann die mit den Methoden von Analysis I/II lösen:

$$\begin{aligned}\int \frac{dv}{v} &= \int 1dy \\ \ln(v) &= y + c(x) \\ v(x,y) &= e^{y+c_1(x)} \\ &= c_2(x)e^y\end{aligned}$$

Es folgt dass die gesuchte Funktion ist

$$u(x,y) = e^y \int c_2(x)dx + c_3(y) = e^y c_4(x) + c_3(y)$$

Aufgabe 38. Sei $v(x,y) = g(y^2 + x)$, wo g eine beliebig differenzierbare Funktion ist.

(a) Zeigen Sie dass $v_y - 2yv_x = 0$.

(b) Finden Sie eine Partikuläre Lösung so dass $v(x,0) = e^x$ ist.

Lsg.

(a)

Sei $s = y^2 + x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v_x &= g' \cdot 1 = g' \\ v_y &= g' \cdot 2y \\ \Rightarrow v_y - 2yv_x &= 0. \end{aligned}$$

(b)

$$v(x,0) = g(x) = e^x$$

Das heisst

$$v(x,y) = g(y^2 + x) = e^{y^2+x}$$

Aufgabe 39. Man findet die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lsg. Was man schon bemerken kann, sind die verschiedene Elemente der Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= 1, \\ L &= 1, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L} = n\pi, \\ f(x) &= x, \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Man kann also die Lösung schreiben: man beginnt mit dem ersten Anfangswert:

$$u(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$$

Mit den hergeleiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \\ &= 2\left(-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right) \\ &= 2\left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right)\Big|_0^1 \\ &= -2\frac{(-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

Mit dem zweiten Anfangswert folgt

$$g(x) = 0 \Rightarrow B_n^* = 0 \ \forall n \geq 1$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2\frac{(-1)^n}{n\pi}\cos(n\pi t)\right)\cdot\sin(n\pi x)$$

Aufgabe 40. Man findet die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lsg. Was man schon bemerken kann, sind die verschiedene Elemente der Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= 1, \\ L &= 1, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L} = n\pi, \\ f(x) &= x, \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Man kann also die Lösung schreiben: man beginnt mit dem ersten Anfangswert:

$$u(x,0) = k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$$

Anstatt die Koeffizienten mit den hergeleiteten Gleichungen wie gewohnt zu berechnen, man kann schlauer sein: die Fourier-Reihe Darstellung impliziert eine lineare Kombination von Sinusfunktionen. Man kann also ganz einfach ein **Koeffizientenvergleich** durchführen:

$$k \cdot \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(3\pi x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$$

Man kann einfach ablesen, dass:

$$B_1 = k,\ B_3 = -\frac{k}{3},\ B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$$

Mit dem zweiten Anfangswert folgt

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n^* \sin(n\pi x) = 0 \Rightarrow B_n^* = 0\ \forall n \geq 1$$

und somit ist die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = k \cdot \left(\cos(\pi t)\sin(\pi x) - \frac{1}{3}\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)\right)$$

Aufgabe 41. Man findet die Lösung der PDE

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Lsg. Diese Gleichung hat leider nicht die Form einer Wellengleichung, also man kann nicht die hergeleitete Formel benutzen. Man hat aber heute ein neues Vorgehen gelernt: Seperation der Variablen. Man nimmt an $u(x,t) = F(x)G(t)$. Man kann das in der Gleichung einsetzen und man erhält (vergleichen mit **8.2**)

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Man bekommt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \dot{G} = kG \end{cases}$$

Man kann jetzt die Fallunterscheidung durchführen:

$k = 0$: Das Gleichungssystem wird zu

$$\begin{cases} F'' = 0 \Rightarrow F(x) = Ax + B \\ \dot{G} = 0 \Rightarrow G(t) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

falls man die Randbedingungen einsetzt:

$$u(0,t) = F(0) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$
$$u(1,t) = F(1) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$

In allen Fällen gilt

$$u(x,t) = 0$$

$k < 0$: Aus den Kurs Analysis I/II man kennt einer solche Lösung:

$$F(x) = C\cos(\sqrt{-k}x) + D\sin(\sqrt{-k}x)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$F(0) \stackrel{!}{=} 0 = C$$
$$F(L) = D\sin(\sqrt{-k}L) \stackrel{!}{=} 0$$

Die zweite Bedingung sagt entweder:

- $D = 0$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $\sin(\sqrt{-k}) = 0$. Das heisst $\sqrt{-k} \stackrel{!}{=} n\pi$ oder auch $k = -(n\pi)^2$. Es folgt

$$F_n(x) = D \cdot \sin(n\pi x)$$

$k > 0$: Aus den Kurs Analysis I/II man kennt einer solche Lösung:

$$F(x) = Ee^{\sqrt{k}x} + Ie^{-\sqrt{k}x}$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} F(0) &\overset{!}{=} 0 = E + I \\ F(1) &\overset{!}{=} 0 = Ee^{\sqrt{k}} + Ie^{-\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Die erste Randbedingung sagt: $E = -I$. Eingesetzt in die zweite Randbedingung liefert:

$$\begin{aligned} F(1) \overset{!}{=} 0 &= Ee^{\sqrt{k}} + Ie^{-\sqrt{k}} \\ &= E(e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}}) \end{aligned}$$

Das sagt uns entweder:

- $E = 0 = I$ und wir kriegen $F(x) = 0$ wie für $k = 0$.
- $e^{\sqrt{k}} - e^{-\sqrt{k}} = 0$ oder besser $2\sinh(\sqrt{k}) = 0$ das **nie möglich** ist, weil $k > 0$.

Da für $k > 0$ und $k = 0$ hat man $F(x) = 0$ gekriegt, muss man nicht $G(t)$ für diese Fälle betrachten! (Erinnerung: $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$) Für $k < 0$ hat man

$$G(t) = S \cdot e^{kt} = S \cdot e^{-(n\pi)^2 t}$$

Die allgemeine Lösung kann jetzt mit dem **Superpositionsprinzip** geschrieben werden:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D \cdot S \cdot e^{-(n\pi)^2 t} \cdot \sin(n\pi x)$$

Aufgabe 42. Lösen sie die folgende PDE mit der Methode der Charakteristiken:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Lsg. Man erkennt sofort dass $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$. Die PDE ist *parabolisch* da $AC - B^2 = 0$. Die charakteristische Gleichung der PDE lautet also

$$(y')^2 + 2y' + 1 = 0$$

oder

$$(y' + 1)^2 = 0$$

Man erhält die zwei Lösungen $y' = -1$ und es folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= -x + c_1 \\ y_2 &= -x + c_2 \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1 = x + y \\ \Psi(x, y) &= c_2 = x + y \end{aligned}$$

Die bekannte Koordinatentransformation für eine parabolische PDE lautet

$$v = x \quad w = \Psi(x, y) = \Phi(x, y) = x + y$$

Man muss jetzt ableiten und einsetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x &= u_v + u_w \\ u_{xx} &= u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww} \\ u_{xy} &= u_{vw} + u_{ww} \\ u_{yy} &= u_{ww} \end{aligned}$$

wobei ich $v_x = 1$, $v_{xx} = v_y = v_{xy} = 0$, $w_x = w_y = 1$ und $w_{xx} = w_{xy} = w_{yy} = 0$ benutzt habe. Einsetzen in der PDE liefert die Normalform:

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 0 \\ u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww} - 2\left(u_{vw} + u_{ww}\right) + u_{ww} &= 0 \\ u_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

das bestätigt wir haben alles richtig berechnet (die Normalform stimmt)! Nach zweimal integrieren folgt:

$$u_v = C(w), \ u = C(w) \cdot v + D(w)$$

also

$$u(x, y) = x \cdot f_1(x + y) + f_2(x + y)$$

Aufgabe 43. *Prüfungsaufgabe HS 15* Gegeben sei eine unendliche Saite, welche zur Zeit $t = 0$ horizontal um

$$u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right)$$

ausgelenkt werde. Weiter wird angenommen, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei und dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1$ entlang der Saite ausbreiten.

a) Formulieren sie das Problem mathematisch.

Lsg. Man kann hier das Problem mit der eindimensionalen Wellengleichung beschreiben. Der Faktor c ist gegeben und ist $c = 1$; die Anfangsgeschwindigkeit ist gegeben und ist 0. Das heisst

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

b) Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems.

Lsg. Da das Problem exakt wie ein *Cauchy Problem* aussieht, kann man die Lösung von D'Alembert benutzen. Es folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2+e^{x+t}}{1+e^{-x-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{x-t}}{1+e^{-x+t}}\right)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 0dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2+e^{x+t}}{1+e^{-x-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{x-t}}{1+e^{-x+t}}\right)\right) \end{aligned}$$

c) Berechnen sie nun die Lösung des Problems für $x = 2$ nach unendliche Zeit

Lsg.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} u(2,t) &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(\ln\left(\frac{2+e^{2+t}}{1+e^{-2-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{2-t}}{1+e^{-2+t}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{2+e^{2+t}}{1+e^{-2-t}} \cdot \frac{2+e^{2-t}}{1+e^{-2+t}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{4+2e^{2-t}+2e^{2+t}+e^4}{1+e^{-2+t}+e^{-2-t}+e^{-4}} \cdot \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{4e^{-t}+2e^{2-2t}+2e^2+e^{4-t}}{e^{-t}+e^{-2}+e^{-2-2t}+e^{-4-t}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2e^4 \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) + 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 44. Sei $u(x,t)$ die Lösung von der eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Finden Sie $u(0, \frac{1}{2})$ mit der d'Alembertsche Formel.

Lsg. Man kann die Formel von d'Alembert direkt benutzen:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$$\begin{aligned} u\left(0, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}(1+1+1) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(b) Finden Sie $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Lsg. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \int_{-1}^{1} g(s)ds\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 45. Betrachten Sie einen isolierten, homogenen Stab mit

$$\alpha^2 = \frac{\text{Thermische Leitfähigkeit}}{\text{Dichte} \times \text{spezifische Wärme}}$$

welcher entlang der x-Achse positioniert ist. Die Anfangstemperatur sei $f(x)$, wobei die enden auf konstanter Temperatur 0 gehalten werden. Formulieren und lösen Sie das Anfangsrandwertproblem, welches die Temperaturverteilung im Stab beschreibt, wenn

a) die Länge des Stabes gleich 6 ist und $f(x) = 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

Lsg. Man kann mit den gegebenen Informationen ($L = 6$, $c = \alpha$ und $f(x)$) das Problem mathematisch schreiben:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(6,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) = 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), 0 < x < 6 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{6}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{36}t}$$

Mit der bekannten Lösung, kann man die Anfangsbedingung $u(x,0)$ überprüfen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{6}x\right) \stackrel{!}{=} 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

Da es nur Sinusfunktionen vorkommen, kann man einfach Koeffizientevergleich anwenden:

$$B_4 = 3,\ B_9 = 2,\ B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{4,9\}$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$u(x,t) = 3\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) e^{-\alpha^2 \frac{4\pi^2}{9}t} + 2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) e^{-\alpha^2 \frac{9\pi^2}{4}t}$$

b) die Länge des Stabes gleich 10 ist und $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Lsg. In diesem Fall kann man das Problem als

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(10,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{100}t}$$

Mit der bekannten Lösung, kann man die Anfangsbedingung $u(x,0)$ überprüfen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \stackrel{!}{=} \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 < x < 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann jetzt B_n als Fourierkoeffizient berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^{10} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)dx \\ &= \frac{1}{25}\int_0^{5} x\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)dx \\ &= \frac{1}{25}\left(-\frac{10x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\right)\Big|_0^5 + \frac{10}{n\pi}\int_0^5 \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right)dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\Big|_0^5 \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1)^{j+1}, & n = 2j \\ \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^j, & n = 2j+1 \end{cases}, \ j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Die komplette Lösung lautet:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\sin\left(\frac{j\pi}{5}x\right)e^{-\alpha^2\frac{j^2\pi^2}{25}t} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2}\sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{10}x\right)e^{-\alpha^2\frac{(2j+1)^2\pi^2}{100}t}$$

Aufgabe 46. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x - 1$ für $0 < x < \pi$

(a) Bestimmen Sie die ungerade Fortsetzung f_u von f zu einer 2π-periodischen Funktion.

Lsg. Aus ersten Teil des Semesters erkennt man dass

$$f_u = \begin{cases} -e^{-x} + 1, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f_u.

Lsg. Für die Koeffizienten hat man wegen ungerade Fortsetzung $a_0 = a_n = 0$. Für b_n es gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_u(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (e^x - 1) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^x - 1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{e^{\pi} - 1}{n} (-1)^n + \frac{1}{n(n^2+1)} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)} \right) \end{aligned}$$

wobei ich benutzt habe, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx &= \frac{e^x}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx \\ &= \frac{e^x}{n^3} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^3} \int_0^{pi} e^x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n^3} (e^{\pi}(-1)^n - 1) - \frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{1}{n^3} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{1}{n(n^2+1)} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Mit diesen Berechnungen ergibt sich

$$f_u(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)} \right) \sin(nx)$$

(c) Lösen Sie nun für $t > 0$ die PDE

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, \ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f_u(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Lsg. Die allgemein Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist in diesem Fall

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-c^2 n^2 t}$$

und die Anfangsbedingung und Teilaufgabe **b)** liefern

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= f_u(x) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist folglich

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n(n^2+1)} - \frac{e^{\pi}(-1)^n n}{(n^2+1)}\right)\sin(nx)e^{-c^2n^2t}.$$

Aufgabe 47. Finden Sie die zeitlich konstante Lösung der zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

für $0 \leq x,\ y \leq 2$ unter den Randbedingungen

$$\underbrace{u(0,y)}_{I} = \underbrace{u(2,y)}_{II} = \underbrace{u(x,0)}_{III} = 0$$

und

$$\underbrace{u(x,2)}_{IV} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$$

Lsg. Da u nicht von t abhängt, kann man die Gleichung als

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

schreiben. Dies entspricht ein Dirichlet-Problem. Man wendet Separationsansatz an mit $u(x,y) = F(x)G(y)$ und erhält die zwei Gleichungen

$$\begin{cases} F'' &= -kF \\ \ddot{G} &= kG \end{cases}$$

In unserem Fall ist $a = 2$ und also ist $\sqrt{k} = \frac{n\pi}{2}$ und mit I und II folgt

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

Die zweite Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$A_n \cosh(\sqrt{k}y) + B_n \sinh(\sqrt{k}y)$$

und der Randwert $G(0) = 0$ (aus III) liefert $A_n = 0$. Man kann jetzt die Lösung als

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}y\right)$$

Mit IV folgt

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = u(x,2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(n\pi\right)$$

Mit einem Koeffizientenvergleich sieht man folgendes:

$$B_n = 0 \ \forall n \neq 1$$

und

$$B_1 = \frac{1}{\sinh(\pi)}$$

Insgesamt hat man

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

Aufgabe 48. Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ von

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Lsg. Da die Randbedingungen abgeleitet sind, muss man den Separationsansatz benutzen! (die hergeleitete Formel ist nur für *normale* Probleme gültig). Sei

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Mit der gewöhnlichen Notation kriegt man

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

Die Randbedingungen übersetzen sich zu

$$F'(0) = 0$$
$$F'(\pi) = 0$$

Man lost wie immer zuerst

$$\begin{cases} F''(x) = kF(x) \\ F'(0) = F'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung liefert:

$k = 0$: Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist

$$F(x) = Ax + B$$

Mit den Randbedingungen folgt dass $F(x) = C$ konstant sein muss.

$k > 0$: Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist

$$F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$$

Mit den Randbedingungen sieht man leicht dass nur die triviale Lösung möglich ist. Also $F(x) = 0$.

$k < 0$: Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung ist

$$F(x) = A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sin(\sqrt{-k}x)$$

Sei $p = \sqrt{-k}$. Die erste Randbedingung liefert

$$F(x) = A\cos(px)$$

und die zweite

$$p_n = n, \; n \in \mathbb{N}$$

Am Ende kriegt man

$$F_n(x) = A_n \cos(p_n x)$$

Die Gleichung für $G(t)$ liefert für die relevante Fälle

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

wobei

$$\lambda_n = cp_n = cn$$

Man setzt alle Konstanten zusammen und man kriegt mit dem Superpositionsprinzip

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos(nx) e^{-\lambda_n^2 t}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos(nx) \stackrel{!}{=} f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Die Koeffizienten T_n sind die Fourierkoeffizienten der $2\pi-$periodischen geraden Fortsetzung (wegen $\cos(nx)$) von f. Es gilt

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Für $n > 0$ gilt

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)dx + \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2}) \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^j - 1), & n = 2j \\ \frac{2}{n^2\pi}, & n = 2j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$u(x,t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{((-1)^j - 1)}{j^2}\cos(2jx)e^{-4j^2c^2t} - \frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}\cos((2j+1)x)e^{-(2j+1)^2c^2t}$$

Aufgabe 49. Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

unter der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in Form eines Fourier-Integrals.

Lsg. Die allgemeine gefundere Lösung ist

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right) e^{-c^2p^2t} dp$$

Wir berechnen die Koeffizienten $A(p)$ und $B(p)$:

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v\cos(pv)dv \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} v\cos(pv)dv \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{p}\sin(pv)\Big|_0^1 - \frac{1}{p}\int_0^1 \sin(pv)dv\right) \\ &= \frac{2}{\pi p^2}\left(p\sin(p) + \cos(p) - 1\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v\sin(pv)dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei ich benutzt habe, dass $|x|$ eine gerade Funktion ist. Einsetzen in der allgemeine Lösung liefert

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\sin(p) + \cos(p) - 1}{p^2}\cos(px)e^{-c^2p^2t}dp$$

Aufgabe 50. Man bestimme mittels Fouriertransformation (bezüglich der Variablen x) die Lösung des Anfangswertproblems (für Konstanten D, $k > 0$)

$$\begin{cases} u_t &= Du_{xx} - ku_x, \\ u(x,0) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

Lsg. Man wendet links und rechts die Fourier-Transform an. Es gilt

$$\hat{u}_t = -(D\omega^2 + ik\omega)\hat{u}$$

Man löst diese gewöhniche Differentialgliechung und erhält

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}(\omega,0)e^{-(D\omega^2+ik\omega)t}$$

mit

$$\hat{u}(\omega,0) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

und also

$$\hat{u}(\omega,t) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}e^{-(D\omega^2+ik\omega)t}$$

Man muss hier das umschreiben um die Eigenschaften der Fourier-Transform zu benutzen. Man betrachtet die Exponenten:

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega^2}{2} - D\omega^2 t - ik\omega t &= \omega^2\left(-\frac{1}{2} - Dt\right) - ikt\omega \\
&= -\frac{\omega^2}{2}(2Dt+1) - ik\omega t \\
&= -\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega + \frac{ikt}{(2Dt+1)}\right)^2 + \text{Kompensationsfaktor} \\
&= -\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega^2 + \frac{2ikt\omega}{(2Dt+1)} - \frac{k^2t^2}{(2Dt+1)^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}
\end{aligned}$$

Die bessere Form ist also

$$-\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega + \frac{ikt}{(2Dt+1)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}$$

Wieder als Exponentialfunktion geschrieben ist:

$$\hat{u}(\omega,t) = e^{-\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}}e^{-\frac{1}{2}(2Dt+1)\left(\omega+\frac{ikt}{(2Dt+1)}\right)^2}$$

Man kann hier die bekannte Regeln

$$\hat{f}(\omega + a) = e^{-iax}\hat{f}(\omega)$$

und

$$\mathscr{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

benutzen. Hier hat man

$$\frac{1}{4a} = \frac{(2Dt+1)}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2(2Dt+1)}$$

und

$$\sqrt{2a} = \frac{1}{\sqrt{2Dt+1}}$$

Insgesamt hat man

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= e^{-\frac{1}{2}\frac{k^2t^2}{2Dt+1}} e^{\frac{kt}{2Dt+1}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2Dt+1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2Dt+1}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2Dt+1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{2Dt+1}(x^2-2ktx+k^2t^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2Dt+1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-kt)^2}{2Dt+1}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 51. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} t^2 u_x - u_t = 0, \\ u(x,0) = 3\cos(x) \end{cases}$$

Tipp: Sie brauchen nicht die Fourier Transform von $3\cos(x)$ zu berechnen.

Lsg. Man kann wie gewohnt, die Gleichung anders schreiben:

$$t^2 u_x = u_t$$

Man wendet Fourier Transform links und rechts und erhält

$$\hat{u}_t = i\omega t^2 \hat{u}$$

Das entspricht nochmals eine ODE. Man kann auch den Anfangswert transformieren, es gilt

$$\hat{u}(\omega, 0) = \mathscr{F}(3\cos(x)) = \hat{f}(\omega)$$

Die ODE kann mit dem Anfangswert gelöst werden, die Lösung lautet

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega \frac{t^3}{3}}$$

Man muss jetzt die inverse Fourier Transform berechnen, um die Lösung $u(x,t)$ zu kriegen. Es gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} e^{i\omega \frac{t^3}{3}} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \left(x + \frac{t^3}{3}\right)} d\omega \\ &= \underbrace{f\left(x + \frac{t^3}{3}\right)}_{x-Shift} \\ &= 3\cos\left(x + \frac{t^3}{3}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 52. Finden Sie die zeitlich konstante Lösung u der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \nabla^2 u$$

auf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}$, wobei die Temperatur auf dem Rand durch

$$u(x, y) = xy$$

gegeben ist.

Lsg. Die Differentialgleichung wird zu

$$\nabla^2 u = 0$$

Man erkennt wie das Gebiet aussehen sollt: D ist eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 4, das entspricht ein Radialsymmetrisches Gebiet. Mit den Polarkoordinaten

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases}$$

bekommt man das transformierte Problem

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_r\frac{1}{r} = 0, & \text{auf } \{(r, \theta) \text{ s.d. } 0 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ u(4, \theta) = 16\cos(\theta)\sin(\theta), & \text{auf } \{(R, \theta) \text{ s.d. } 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung darf als bekannt benutzt werden. Es gilt

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Mit den Randbedingung folgt

$$\begin{aligned} u(4, \theta) &= 16\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= 8\sin(2\theta) \\ &\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

Man muss hier die Fourier-Koeffizienten nicht berechnen, ein Vergleich reicht und ergibt

$$\begin{aligned} A_n &= 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ B_n &= 0,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{2\} \\ B_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(r, \theta) = \frac{r^2}{2}\sin(2\theta).$$

Aufgabe 53. Gesucht ist die Lösung der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten der Einheitsscheibe, wobei auf dem Rand gilt

$$u_r(1,\theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$$

Lsg. Die allgemeine Lösung ist immer

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Die Randbedingung verlangt

$$\begin{aligned} u_r(1,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \\ &\overset{!}{=} \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta) \end{aligned}$$

Man muss hier die Fourier-Koeffizienten nicht berechnen, ein Vergleich reicht und ergibt

$$\begin{aligned} A_n &= 0,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{2\} \\ A_2 &= \frac{1}{2}, \\ B_n &= 0,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{3\} \\ B_3 &= 1 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(r,\theta) = \frac{r^2}{2}\cos(2\theta) + r^3 \sin(3\theta)$$

Aufgabe 54. Bestimmen Sie die Lösung des Dirichlet-Problems in Polarkoordinaten auf einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius R, wenn

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u(R,\theta) = |\theta|, \ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Lsg. Die allgemeine Lösung lautet

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Die Randbedingung liefert

$$\begin{aligned} u(R,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \\ &\overset{!}{=} |\theta| \end{aligned}$$

Mit den gelernten Formeln kann man die Koeffizienten der Fourierreihen-Entwicklung berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \phi^2 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(n\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} \phi \cos(n\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{R^n \pi} \left(\underbrace{\frac{\phi}{n} \sin(n\phi) \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) d\phi \right) \\ &= \frac{1}{R^n n^2 \pi} \cos(n\phi) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} \phi \sin(n\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{R^n \pi} \left(-\frac{\phi}{n} \cos(n\phi) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) d\phi \right) \\ &= \frac{1}{R^n \pi} \left(-\frac{2\pi}{n} + \underbrace{\frac{1}{n^2} \sin(n\phi) \Big|_0^{2\pi}}_{=0} \right) \\ &= -\frac{2}{R^n n}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung lautet also

$$u(r,\theta) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n n}\sin(n\theta).$$

Aufgabe 55. Lösen das Problem

$$\begin{cases} u_{xx} = 100u_{tt} + 100u_t + 25u \\ u(0,t) = \sin(t), \text{ Randbedingung} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \text{ Anfangsbedingung} \end{cases}$$

mit der Laplace-Transform. Die Lösung muss für alle positive x beschränkt sein.

Lsg. Man wendet die Laplace-Transform auf beiden Seiten an: mit der Ableitungsregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}U \\ &= 100s^2U - 100sU + 25U \\ &= (10s+5)^2U \end{aligned}$$

Aus Analysis I/II folgt

$$U(x,s) = C_1(s)e^{-(10s+5)x} + C_2(s)e^{(10s+5)x}$$

Da die Lösung muss für alle positive x beschränkt sein, setzt man $C_2(s) = 0$. Für die Randbedingung gilt

$$\begin{aligned} U(0,s) &= \mathscr{L}(u(0,t)) \\ &= \frac{1}{s^2+1} \\ &= C_1(s) \end{aligned}$$

Das heisst

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2+1}e^{-(10s+5)x}$$

Man wendet die Inverse Laplace Transform an und erhählt

$$u(x,t) = e^{-5x}\sin(t-10x)u(t-10x).$$

Aufgabe 56. Es sei

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

die Einheitskreisscheibe. die Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ erfülle die Laplacegleichung $\Delta u = 0$. Ferner sei $f = u|_{\delta_D}$ die Einschränkung von u auf den Rand δ_D von D. Wie üblich bezeichnen (r, ϕ) die Polarkoordinaten.

(a) Gilt $f(\phi) = \sin(\phi)$, so folgt $u(0, 0) = 0$

Lsg. Mit der Formel berechnet man

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Antwort lautet also: **wahr**.

(b) Ist $f(\phi) = 0$ für alle ϕ, so folgt $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in D$.

Lsg. Da $f(\phi) = 0$ folgt mit der oben genannten Formel

$$u(x, y) = 0$$

auf dem Rand. Die Antwort lautet also: **wahr**.