

Lineare Algebra – Die wichtigsten Eigenschaften

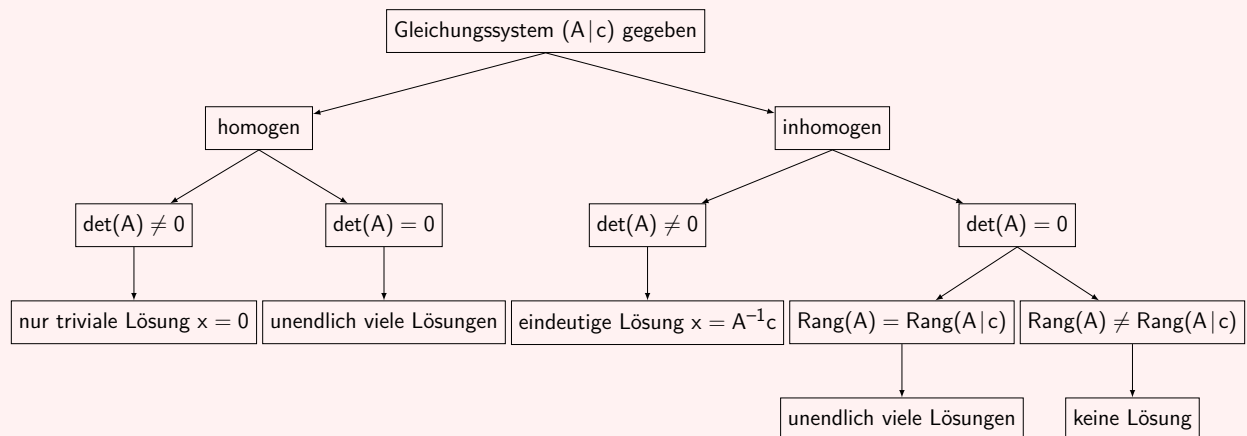
Quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Äquivalente Aussagen

1. $\det(A) \neq 0$.
2. $\text{Rang}(A) = n$.
3. A ist invertierbar (regulär).
4. Homogenes System $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.
5. Spalten (bzw. Zeilen) von A sind linear unabhängig.
6. 0 ist kein Eigenwert von A .

💡 Wichtig

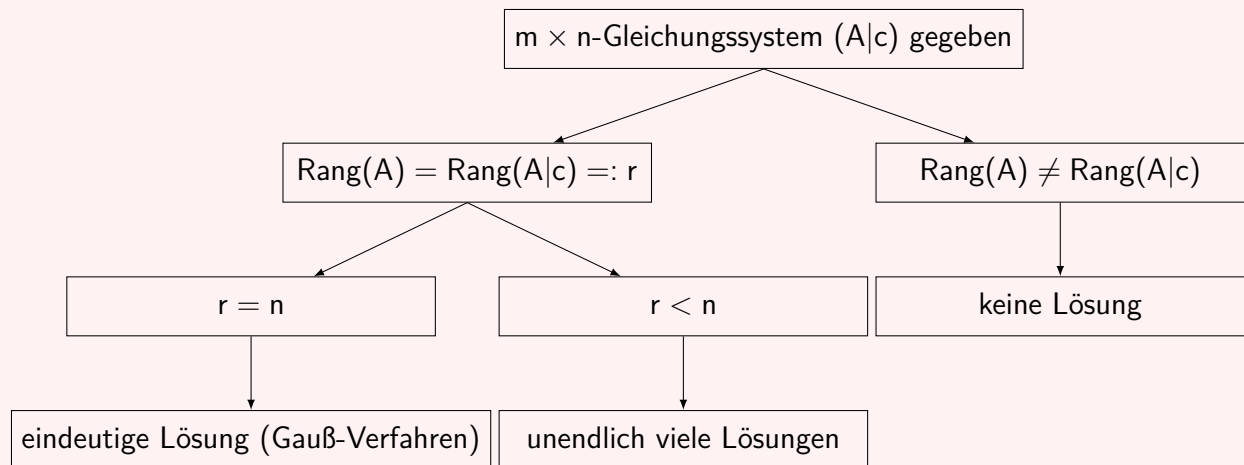
Die Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems $Ax = c$ lässt sich mit folgendem Schema bestimmen:



Nichtquadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

💡 Wichtig

Die Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems $Ax = c$ lässt sich mit folgendem Schema bestimmen:



Determinante

Eigenschaften

- $\det(E) = 1$ für die Einheitsmatrix E .
- Dreiecksmatrix: $\det(A) = \text{Produkt der Diagonalelemente}$.
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
- Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.
- Zeilentausch: Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar k : Die Determinante wird mit k multipliziert.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Beim Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante unverändert.
- Lineare Abhängigkeit: Wenn zwei Zeilen/Spalten linear abhängig sind, ist $\det(A) = 0$.
- $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ ist singulär (nicht invertierbar).

Spur

Eigenschaften

- Definition: $\text{Spur}(A) = \text{Summe aller Diagonalelemente.}$
- Es gilt auch: $\text{Spur}(A) = \text{Summe aller Eigenwerte!}$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenschaften

- Def.: $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$.
- Bestimmung: Nullstellen von $\det(A - \lambda E)$.
- Eigenvektor zu λ_i : $(A - \lambda_i E \mid 0)$ lösen.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

- 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - (ad - bc)}.$$

- Eigenwerte einer Dreiecksmatrix (oder Diagonalmatrix) stehen auf der Diagonale.

Inverse Matrizen

Eigenschaften

- Nur quadratische Matrizen mit $\det(A) \neq 0$ sind invertierbar.
- $A^{-1}A = E = AA^{-1}$.
- Für 2×2 -Matrix: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Inverse über Gauss-Jordan-Verfahren berechenbar: $(A \mid E) \rightarrow (E \mid A^{-1})$.
- Ist A^{-1} die Inverse von A , so gilt auch: $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Umkehrung der Reihenfolge!).
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.