Tag 1

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + 2x + 1}{2x^6 + 8x + 9}$$

(b) Bestimme die Nullstellen von $x^3 + 3x^2 - 16x + 12$.

(c) Berechne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

(d) Berechne die Ableitung von $e^{\sqrt{x^3}}$.

Solution:

(a) Der Grad im Zähler ist kleiner als im Nenner, deswegen ist der Grenzwert = 0.

(b) Wie man mit kurzem Nachrechnen sehen kann, ist $x = 1$ eine Nullstelle. Somit führen wir eine Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 - 16x + 12) \div (x - 1) = x^2 + 4x - 12 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 4x^2 - 16x \\ \underline{-4x^2 + 4x} \\ -12x + 12 \\ \underline{12x - 12} \\ 0 \end{array}$$

Die Nullstellen können wir nun mithilfe der Mitternachtsformel ausrechnen und erhalten somit insgesamt $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -6$ als Nullstellen.

(c) Mit l'Hopital erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$$

(d) Die Ableitung kann durch Anwenden der Kettenregel und $\sqrt{x} = x^{1/2}$ berechnet werden. Wir erhalten

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} e^{\sqrt{x^3}}$$

Aufgabe 2 :

Finde **alle** $a \in \mathbb{R}$ sodass die folgende Funktion stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sin(x)} & x < 0 \\ \frac{x^5 + x^6 + x^7}{x^a + x^3 + x^4} & x \geq 0 \end{cases}$$

Solution: Die beiden Teilfunktionen sind also

$$f_1(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$$
$$f_2(x) = \frac{x^5 + x^6 + x^7}{x^a + x^3 + x^4}$$

Der Berührungspunkt ist $x = 0$ und somit berechnen wir den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = 0$$

wobei wir l'Hopital benutzt haben. Für die andere Teilfunktion müssen wir mehrmals L'Hôpital anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + x^6 + x^7}{x^a + x^3 + x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 6x^5 + 7x^6}{ax^{a-1} + 3x^2 + 4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20x^3 + 30x^4 + 42x^5}{a(a-1)x^{a-2} + 6x + 12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{60x^2 + 120x^3 + 210x^4}{a(a-1)(a-2)x^{a-3} + 6 + 24x} = \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

Also ist der Grenzwert immer $= 0$, unabhängig von a und somit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 :

Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n \cdot 3^n}$$

Untersuche die Konvergenz dieser Reihe:

- (a) Bestimme den Konvergenzradius R .
- (b) Untersuche die Konvergenz am Rand des Intervalls.
- (c) Gib den Konvergenzbereich der Reihe an.

Solution:

(a) Wir schreiben die Potenzreihe in der Form $\sum c_n x^n$ mit

$$c_n = \frac{2^n}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Dann ergibt sich der Konvergenzradius über

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \\ &= 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius $R = \frac{3}{2}$.

(b) Es ist $x_0 = 0$ also untersuchen wir $x = \frac{3}{2}$ und $x = -\frac{3}{2}$. Für $x = \frac{3}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot \frac{3}{2})^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

was die harmonische Reihe ist und divergiert.

Für $x = -\frac{3}{2}$ ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert.

(c) Die Potenzreihe konvergiert genau auf dem Intervall $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.