Tag 3

Aufgabe 1 :

Berechne folgendes Integral:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-2}$$

Solution: Es gilt $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ und somit können wir die Partialbruchzerlegung anwenden und erhalten:

$$\frac{2x+1}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Koeffizientenvergleich liefert uns

$$A=\frac{5}{3} \quad B=\frac{1}{3}$$

Die Lösung ist also

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-2}=\int \frac{\frac{5}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}=\frac{5}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+C$$

Aufgabe 2 :

Skizziere die folgende Menge:

$$M=\{z\in\mathbb{C} : |\arg(z^2)|<\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re}(z)>0\}$$

Solution: Die erste Bedingung kann umgeschrieben werden zu

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z^2)<\frac{\pi}{2}$$

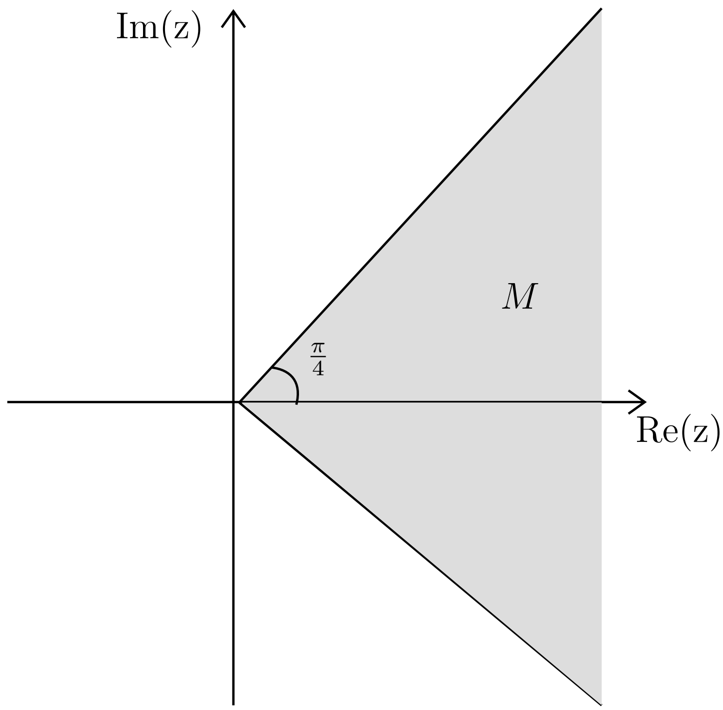
Was ist nun $\arg(z^2)$? Sei $z=re^{i\varphi}$. Dann ist $\arg(z^2)$ der Polarwinkel von $z^2=r^2e^{i2\varphi}$ also genau 2φ. Somit gilt

$$-\frac{\pi}{2}<2\varphi<\frac{\pi}{2}$$

und

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

Zusammen mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ (also $x > 0$) erhalten wir die Menge:



Aufgabe 3 :

Berechne alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 16$$

Solution: $w = 16$ in Polarform ist

$$w = 16e^{i\cdot(0+2\pi k)} = 16e^{i\cdot 2\pi k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

und somit

$$z = w^{1/4} = 2e^{i\frac{\pi}{2}k}$$

Einsetzen von $k = 0, 1, 2, 3$ ergibt

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2 \\
z_1 &= 2i \\
z_2 &= -2 \\
z_3 &= -2i
\end{aligned}
$$

Diese Aufgabe hätte sich auch grafisch lösen lassen. Denn $z = 2, -2$ sind beide bekannt. Da die Lösungen ein gleichmässiges Quadrat ergeben sollen in der Gaussebene, müssen $2i$ und $-2i$ die beiden anderen Lösungen sein.

Aufgabe 4 :

Untersuche die Lösbarkeit des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ (du musst die Lösung/-en nicht explizit berechnen). Bestimme für welche Werte von λ das System eine eindeutige Lösung, unendlich viele oder keine Lösung besitzt. Bestimme ausserdem $\det(A)$ der Koeffizientenmatrix A in Abhängigkeit von λ.

$$
\begin{aligned}
\lambda x + y + z &= 1 \\
x + \lambda y + z &= 1 \\
x + y + \lambda z &= 1
\end{aligned}
$$

Solution: Die Koeffizientenmatrix lautet:

$$
A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Berechne die Determinante von A:

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= \lambda(\lambda^2 - 1) - 1(\lambda - 1) + 1(1 - \lambda) \\
&= \lambda^3 - \lambda - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) \\
&= \lambda^3 - 3\lambda + 2
\end{aligned}
$$

Finde die Nullstellen von $\det(A)$:

$$
\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \Rightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -2
$$

Fall 1: $\lambda \neq 1$ und $\lambda \neq -2$
Dann ist $\det(A) \neq 0$, also ist A *invertierbar*. Das System hat *eine eindeutige Lösung.*

Fall 2: $\lambda = 1$
Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle Zeilen sind gleich $\Rightarrow$ Rang$(A) = 1$ und Rang$(A|c) = 1$, da wir mit $c = (1,1,1)^T$ einfach noch einer 1-er Spalte erhalten.
$\Rightarrow$ Das System hat also *unendlich viele Lösungen.*

Fall 3: $\lambda = -2$
Dann ist

$$(A|c) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Mit Gauss erhalten wir

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Nun sehen wir: In der Koeffizientenmatrix A haben wir eine Nullzeile $\Longrightarrow$ Rang$(A) = 2$, aber im erweiterten System $(A|c)$ haben wir keine Nullzeile $\Longrightarrow$ Rang$(A|c) = 3$.

$$\Rightarrow \text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|c) \Rightarrow \text{Das System ist } \textit{nicht lösbar.}$$

Zusammengefasst gilt also:

- Eindeutige Lösung für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$
- Unendlich viele Lösungen für $\lambda = 1$
- Keine Lösung für $\lambda = -2$