Harry's

Mathematik I/II

PVK Tag 4

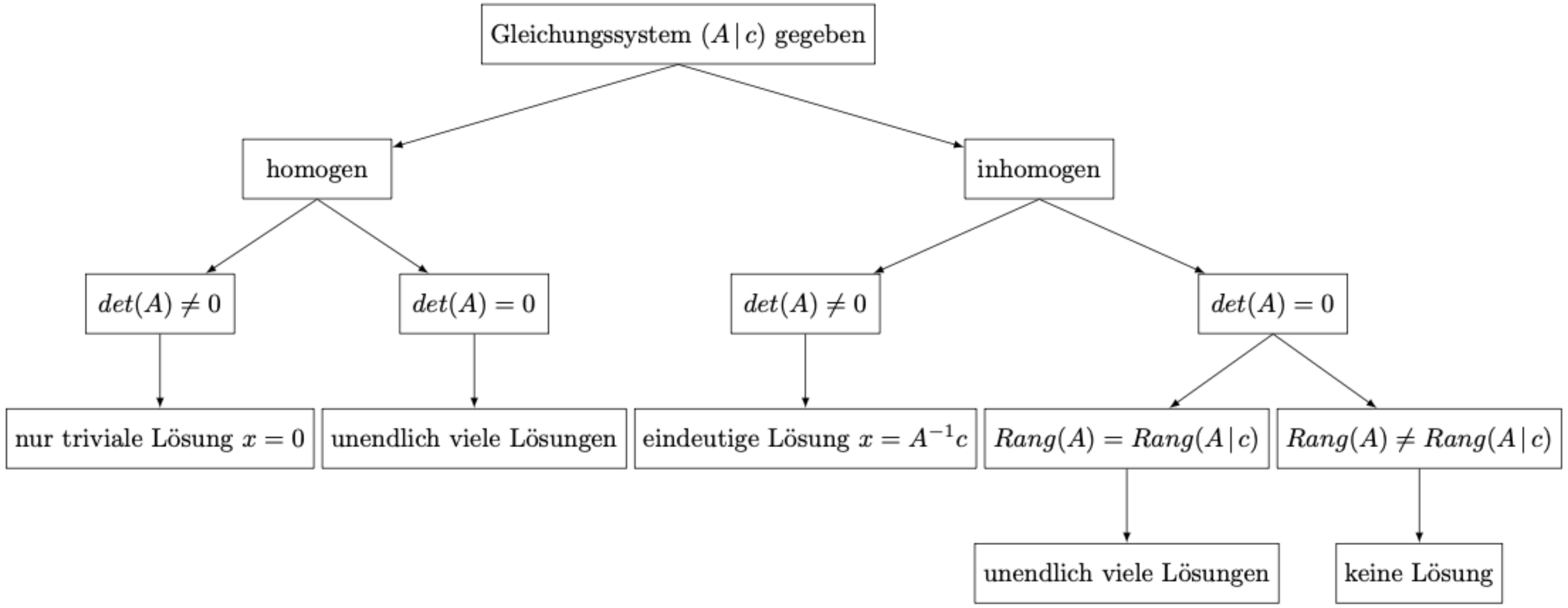
19. Juni 2025

Sommer 2021, Aufgabe 3

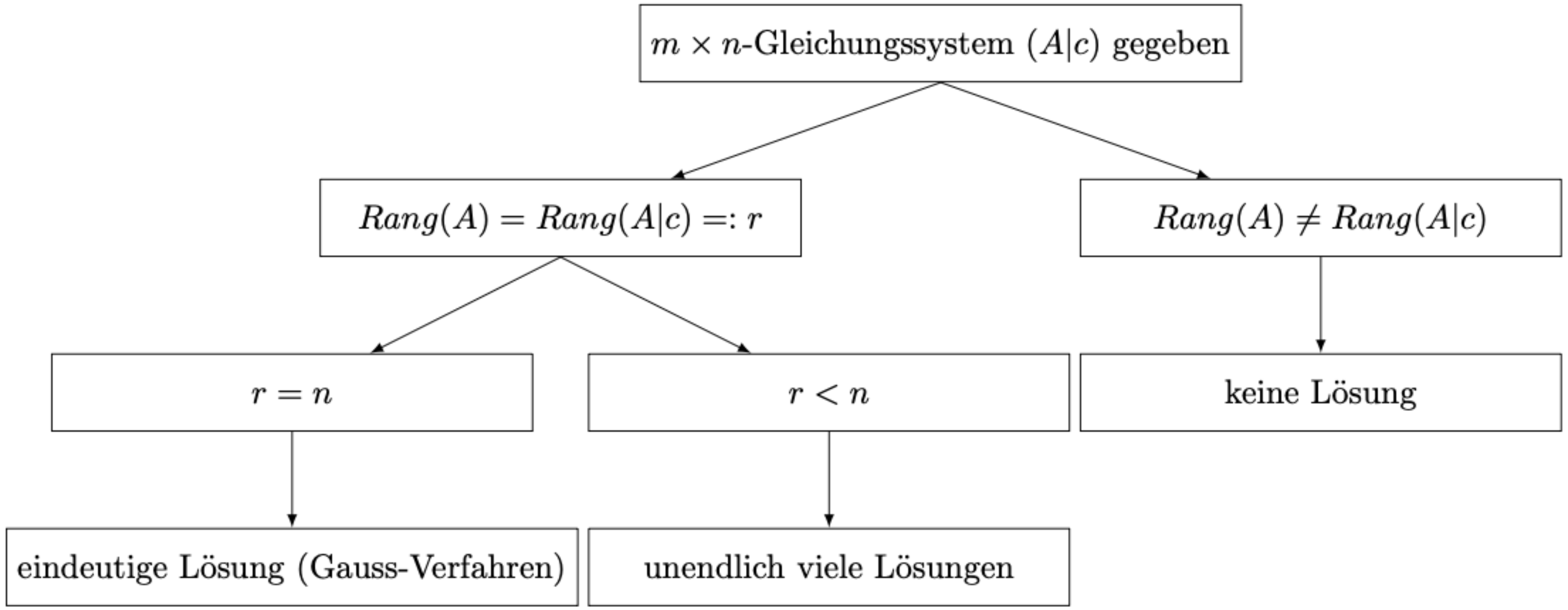
Sei A die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \mu \\ \mu & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und sei b der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) [**2 Punkte**] Sei $\mu = 2$. Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Quadratische Matrix



nicht-quadratische Matrix



Sommer 2022, Aufgabe 2

2.A1 **[4 Punkte]** Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

(ii) Bestimmen Sie alle b, sodass D_b invertierbar ist.

(iii) Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des Linearen Gleichungssystems $D_b \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von b: Für welche b gibt es Lösungen? Für welche b sind diese eindeutig?

Winter 2024, Aufgabe 1

MC14. Sei $A_b = \begin{pmatrix} 6 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Für welches b hat D_b Eigenwerte, die **nicht** auf der reellen Achse liegen?

(A) $b = -5$,

(B) $b = 0$,

(C) $b = 5$,

(D) $b = 10$.

Sommer 2021, Aufgabe 3

(e) [**4 Punkte**] Finden Sie die Eigenwerte von $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sowie zu jedem der beiden Eigenwerte einen dazugehörigen normierten Eigenvektor.

Winter 2024, Aufgabe 4

4. Aufgabe **[4 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mu & 1 & 2 \\ 2 & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **[3 Punkte]** Sei $\mu = 2$. Berechnen Sie die Inverse von A.

(b) [**3 Punkte**] Sei $\mu = 2$. Berechnen Sie die Inverse von A.

Lösung:

Sei $\mu = 2$, wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $\bar{a}_{ij}$ die Cofaktoren sind,

$$\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j},$$

und $A_{i,j}$ die Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die Inverse von A ist somit

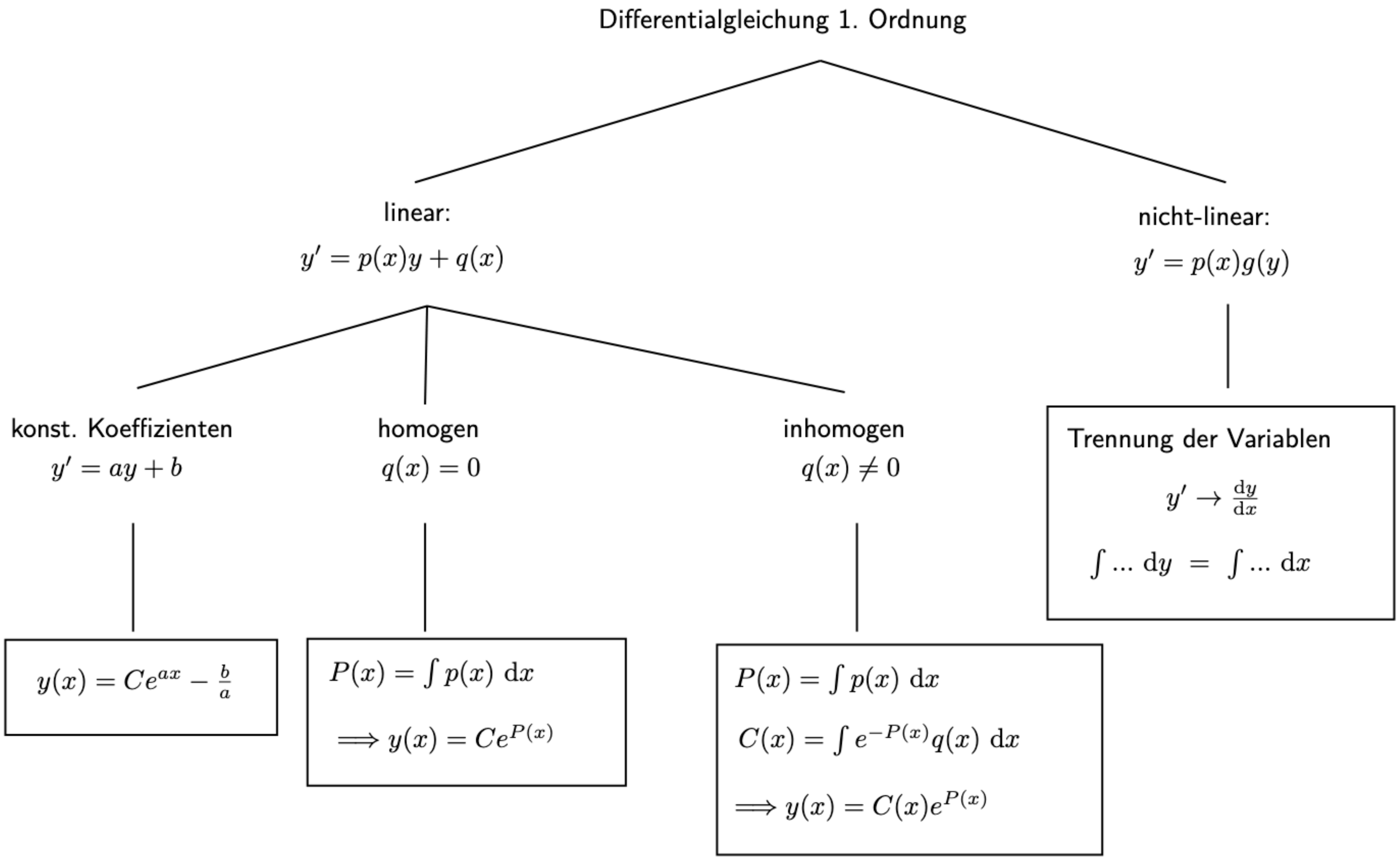
$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sommer 2021, Aufgabe 5

5. Aufgabe **[12 Punkte]**

Finden Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(a) **[4 Punkte]** $y' + 3y = 9x$ mit $y(0) = 4$.



Differentialgleichung 1. Ordnung
linear:
$y' = p(x)y + q(x)$
nicht-linear:
$y' = p(x)g(y)$
konst. Koeffizienten
$y' = ay + b$
homogen
$q(x) = 0$
inhomogen
$q(x) \neq 0$
Trennung der Variablen
$y' \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$\int \dots \, \mathrm{d}y \;=\; \int \dots \, \mathrm{d}x$
$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$
$P(x) = \int p(x) \, \mathrm{d}x$
$\Longrightarrow y(x) = Ce^{P(x)}$
$P(x) = \int p(x) \, \mathrm{d}x$
$C(x) = \int e^{-P(x)} q(x) \, \mathrm{d}x$
$\Longrightarrow y(x) = C(x)e^{P(x)}$

Sommer 2023, Aufgabe 1

MC13. Welche ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y(x)y'(x) = e^{2x}$$

unter der Anfangsbedingung $y(0) = -1$?

(A) $y(x) = e^x - 2$,

(B) $y(x) = -e^x$,

(C) $y(x) = -e^{-x}$,

(D) $y(x) = -e^{-2x}$.

Winter 2024, Aufgabe 1

MC15. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y(x) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**?

(A) $y(x) = 1$ ist die einzige konstante Lösung der Differentialgleichung,

(B) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1 \cos(3x)$ für eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$,

(C) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ für Konstanten $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$,

(D) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + C_3 e^{-3x}$ für Konstanten $C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}$.

Störfunktion $g(x)$	**Lösunganansatz** $y_p(x)$ DGL: $y'' + ay' + by = g(x)$ char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$
Polynom vom Grad n	• $b \neq 0 : y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + ... + Cx + D$ • $a \neq 0, b = 0 : y_p = Ax^{n+1} + Bx^n + ... + Cx^2 + Dx$ • $a = 0, b = 0 : y_p = Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + ... + Cx^3 + Dx^2$ Dabei sind a, b von $y'' + ay' + by = g(x)$ zu entnehmen. $A, B, C, ...$ sind die, durch Koeffizientenvergleich zu bestimmenden, Koeffizienten.
$g(x) = ke^{cx}$	• c ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = A \cdot e^{cx}$$ • c ist eine **einfache** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = Ax \cdot e^{cx}$$ • c ist eine **doppelte** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$$ Dabei ist c von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. A ist der zu bestimmende Koeffizient. Tipp: die Nullstellen des charakteristischen Polynoms hast du schon bestimmt λ_1, λ_2. Falls beide gleich sind und c entsprechen, ist es beispielsweise eine doppelte Nullstelle.
$g(x) = \sin(\beta x)$ oder $g(x) = \cos(\beta x)$ oder $g(x) = n \cdot \sin(\beta x) + m \cdot \cos(\beta x)$ wobei $n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$.	• $i\beta$ ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$$ • $i\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = Ax \cdot \sin(\beta x) + Bx \cdot \cos(\beta x)$$ Dabei ist β von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. A und B sind die zu bestimmende Koeffizienten. Alternativ kann auch $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$ respektive $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \phi)$ als Ansatz gebraucht werden, wobei C und ϕ die zu bestimmenden Koeffizienten sind.
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ Dabei ist P_n ein Polynom $n-$ten Grades.	• $c + i\beta$ ist **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = e^{cx}(Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x))$$ • $c + i\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $$y_p = x \cdot e^{cx}(Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x))$$ Dabei sind c und β von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. Die Polynome n-ten Grades Q_n und R_n enthalten die zu bestimmende Koeffizienten. Man setze also beispielsweise $Q_n = Ax^n + Bx^{n-1} ... + Cx + D$ und bestimme die Koeffizienten $A, B, C...$ mit Koeffizientenvergleich.

Sommer 2021, Aufgabe 5

5. Aufgabe **[12 Punkte]**

Finden Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(b) **[4 Punkte]** $y'' + 4y' + 4y = -2e^{-2x}$ mit $y(0) = y'(0) = -1$.