# Analysis I/II

Hrvoje Krizic

November 2, 2021

**Bemerkung 0.1.** *Alle Sätze, welche mit einem * gekennzeichnet sind, sollte man an der Prüfung beweisen können.*

## 1 Einführung

**Satz 1.1.** *(De Morgan in Logik) Es gilt*

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

**Satz 1.2.** *(De Morgan in Mengenlehre) Sei $A, b \subseteq X$, dann gilt*

$$X \backslash (A \cup B) = X \backslash A \cap X \backslash B$$
$$X \backslash (A \cap B) = X \backslash A \cup X \backslash B$$

**Definition 1.1.** *Sei $f : X \to Y$*

1. *Die Funktion $f$ heisst injektiv oder eine Injektion falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt, dass $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$*
2. *Die Funktion $f$ ist surjektiv, eine Surjektion oder eine Funktion von $X$ auf $Y$ , falls $f(X) = Y$ .*
3. *Die Funktion f heisst bijektiv, eine Bijektion oder eine eineindeutige Abbildung, falls f surjektiv und injektiv ist.*

**Definition 1.2.** *(glatte Funktion) Wir nennen eine Funktion glatt, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist.*

**Definition 1.3.** *(Relationen). Seien $X$ und $Y$ Mengen. Eine Relation auf $X \times Y$ ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ .*

**Definition 1.4.** *(Totalität) Wir nenne eine Relation total, wenn $\forall x, y : x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$*

**Definition 1.5.** *(Äquivalenzrelationen). Eine Relation $\sim$ auf $X$ ist eine Äquivalenzrelation, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Reflexivität: $\forall x \in X : x \sim x$.*

2. *Symmetrie:* $\forall x, y \in X : x \sim y \iff y \sim x$

3. *Transitivität:* $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \implies x \sim z$.

**Definition 1.6.** *(Ordnungsrelation) Eine Relation $\geq$ auf $X$ ist eine Ordnungsrelation, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Reflexivität:* $\forall x \in X : x \geq x$.

2. *Identität:* $\forall x, y \in X : x \geq y \wedge y \geq x \implies x = y$

3. *Transitivität:* $\forall x, y, z \in X : ((x \geq y) \wedge (y \geq z)) \implies x \geq z$.

*Der Unterschied zwischen Äquivalenzrelation und Ordnungsrelation liegt also in der Symmetrie/Identität.*

**Definition 1.7.** *(Mächtigkeit) Es gilt:*

$$|X| \geq |Y| \iff \text{Es existiert eine Surjektion } X \to Y$$

$$|X| \leq |Y| \iff \text{Es existiert eine Injektion } X \to Y$$

**Satz 1.3.** *(Cantor-Schröder-Bernstein)*

$$|X| \geq |Y| \wedge |Y| \geq |X| \implies |X| = |Y|$$

**Definition 1.8.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heisst obere Schranke für $A$, falls $\forall a \in A : a \leq b$. Eine untere Schranke für $A$ ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, derart dass $\forall a \in A : a \geq c$.*

**Definition 1.9.** *(Supremum und Infimum) Das Supremnm von einer Menge $A$ (qeschrieben $\sup A$) ist die kleinste obere Schranke von $A$. Das Infinum von $A$ (geschrieben $\inf A$) ist die grösste untere Schranke von $A$. Falls das Supremum oder Infinum in der Menge $A$ enthalten sind, so sind sie Maximum und Minimum der Menge.*

**Wichtig 1.1.** *(Rechenregeln mit $\sup$) Es gilt*

1. $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$

2. $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$ *(falls $X \cap Y \neq \emptyset$)*

3. $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$

4. $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$ *(falls $X, Y > 0$)*

**Satz 1.4.** *(Archimedisches Prinzip) Es gelten folgende Aussagen:*

1. *Jede nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum.*

2. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$*

3. *Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$.*

# 2 Folgen

**Definition 2.1.** *(Konvergenz einer Folge) Eine Folge $a_n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{K}$, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \text{ gilt } |a_n - a| < \epsilon$$

**Definition 2.2.** *(Divergenz einer Folge) Eine Folge $a_n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{K}$, falls*

$$\forall K > 0 \; \exists N = N(K) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \text{ gilt } |a_n| > K$$

**Rechnen 2.1.** *(Einfache Rechenregeln mit Limes) Seien $a_n$ und $b_n$ konvergent mit Grenzwerten $a$ bzw. $b$. Dann folgt*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
3. *Falls $b_n, b \neq 0$, so gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
4. *Falls $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$*

**Satz 2.1.** *(Sandwich-Theorem*) Es seien die drei Folgen $b_n \leq a_n \leq c_n$ gegeben. Falls $b_n$ und $c_n$ konvergent sind mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, so ist auch $a_n$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.*

**Definition 2.3.** *(Monotonie) Die Folge $a_n$ heisst monoton wachsend, falls*

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

*Die Definition für monoton fallend entsprechend mit $a_n \geq a_{n+1}$ und streng monoton wachsend/fallend falls zusätzlich $\forall n : a_n \neq a_{n+1}$.*

**Definition 2.4.** *(Beschränktheit einer Folge) Eine Folge heisst nach oben bzw nach unten beschränkt falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$a_n \leq C \text{ bzw } a_n \geq C$$

**Satz 2.2.** *(Satz über monotone Konvergenz) Sei $a_n$ nach oben (bzw nach unten) beschränkt und monoton wachsend (bzw. fallend), dann ist $a_n$ konvergent.*
*(Merkregel: Beschränktheit + Monotonie = Konvergenz).*

**Satz 2.3.** *(Satz von Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Definition 2.5.** *(Limes superior/inferior) Der Limes superior ist wie folgt definiert:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} a_k)$$

*Die Definition von $\liminf$ entsprechend mit $\inf$ statt $\sup$.*

**Definition 2.6.** *(Cauchy-Folgen) Eine Folge $a_n$ heisst Cauchy-Folge, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \text{ gilt } |a_n - a_m| \leq \epsilon$$

**Satz 2.4.** *(Cauchy-Kriterium) Sei $a_n \in \mathbb{R}$ eine reelle Folge. Dann gilt*

$$a_n \text{ konvergiert auf } \mathbb{R}/\mathbb{C}/\mathbb{R}^n \iff a_n \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

**Definition 2.7.** *(Vollständigkeit) Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heisst vollständig, falls $\forall X, Y \subseteq \mathbb{K}$:*

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y \implies \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq c \leq y$$

**Definition 2.8.** *(Vollständigkeit mit Cauchy) Metrische Räume, welche die Eigenschaft haben, dass jede Cauchy-Folge in ihr konvergiert, sind vollständig. $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ sind vollständig, wohingegen $\mathbb{Q}$ keiner ist. Denn die Folge $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n}{2})$ mit $a_1 = 1$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$ und liegt somit nicht in $\mathbb{Q}$.*

**Definition 2.9.** *(Grenzwerte von Funktionen) Eine Funktion $f$ sei auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, das den Punkt $a$ enthält, definiert. $f$ bestitzt an der Stelle $a$ den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, geschrieben*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

*falls*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \text{ mit } |x - a| < \delta \text{ gilt } |f(x) - L| < \epsilon$$

*Um Aufgaben dieser Art zu lösen, suchen wir also das $\delta$ welches von $\epsilon$ abhängt.*

**Definition 2.10.** *(links-/rechtsseitiger Grenzwert) $f$ hat an der Stelle $a \in I$ einen linksseitige Grenzwert $L$, geschrieben*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

*falls*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \text{ gilt } |f(x) - L| < \epsilon$$

*Analog hat $f$ an der Stelle $a \in I$ einen rechtsseitigen Grenzwert $L$, geschrieben*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

*falls*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \text{ gilt } |f(x) - L| < \epsilon$$

## 3 Grenzwertberechnungen

**Methode 3.1.** *(Sandwich-Theorem) Aus $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für $x$ in der Nähe von $a$ und*

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

*folgt*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

**Methode 3.2.** *(Dominanz) Eine weniger mathematische Methode ist es, nur dominierende Teile der Funktion anzuschauen. Beispielsweise in der folgenden Rechnung*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{23}{x} - \sqrt{x} \log x - \log x^{345} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{\sqrt{x} x^{3/2}} - 345 \log x^{3445} - x^3 + 4}$$

*Im Zähler dominiert $\frac{1}{x^2}$, während im Nenner $\frac{3}{\sqrt{x} x^{3/2}}$ dominiert. Somit können wir die Rechnung vereinfachen in*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

**Wichtig 3.1.** *Für $x \to +\infty$ gilt*

$$... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < e^x \text{ und } \alpha^x < x! < x^x$$

*Für $x \to 0^+$ gilt*

$$... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

**Methode 3.3.** *(Wurzeltrick) Hat man einen Wurzelterm im Zähler oder Nenner, so kann dieser mit der dritten binomischen Regel erweitert werden.*

**Methode 3.4.** *(Zurückführen auf e) Einige Terme können wir so umformen, dass wir im Resultat e erhalten:*

$$\lim_{x \to a} (1 + \frac{1}{p})^p = e \iff p \to \infty \text{ für } x \to a$$

**Methode 3.5.** *(Zurückführen auf $\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$) Einige Terme können wir so umformen, dass wir durch den Trick:*

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \iff f(x) \to 0 \text{ für } x \to a$$

**Satz 3.1.** *(Bernoulli-de l'Hôpital) Es seien $f$ und $g$ zwei in einer Umgebung des Punktes $a$ (auch $a = \infty$) definierte und differenzierbare Funktionen, mit $g' \neq 0$. Falls entweder $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$oder $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$, so gilt*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Methode 3.6.** *(erweiterter l'Hôpital) Wir können den Satz dementsprechend für den Typ "$\frac{0}{0}$" und "$\frac{\infty}{\infty}$" anwenden. Der Typ "$0 \cdot \infty$" kann umgeschrieben werden und kann somit auch mit dieser Methode berechnet werden.*

**Methode 3.7.** *(Eigenschaft von e ausnützen) Wir können in Fällen von* $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ *die Eigenschaft* $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ *ausnützen.*

**Methode 3.8.** *(Taylorreihen) Wir können mithilfe von Taylorreihen (zusammen mit Dominanz) einen Grenzwert bestimmen*

**Wichtig 3.2.** *(Wichtige Taylorreihen)*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\
\log x &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ...
\end{aligned}$$

**Methode 3.9.** *(Substitution) Wir können beim Bestimmen des Grenzwertes auch substituieren, müssen dabei jedoch aufpassen, dass wir auch* $x \to a$ *substituieren. Sei t=g(x) eine Substitution, dann gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to g(a)} f(t)$$

**Methode 3.10.** *(Stirlingformel) Als Abschätzung von* $n!$ *gilt für grosse Zahlen:* $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

**Methode 3.11.** *(Wichtige Grenzwerte)*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1
\end{aligned}$$

# 4 Reihen

**Definition 4.1.** *(Reihen) Unter der n-ten Partialsumme $S_N$ einer Zahlenfolge $a_n$ versteht man die Summe der Folgenglieder von $a_1$ bis $a_n$, bzw.*

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

*Die immer weiter fortgesetzte Partialsumme einer (unendlichen) Zahlenfolge nennt man eine (unendliche) Reihe*

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Definition 4.2.** *(absolute Konvergenz) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.*

**Satz 4.1.** *(absolute Konvergenz*) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

# 5 Konvergenzkriterien (Reihen)

**Methode 5.1.** *(Teleskopsumme) Kann die Summe in die Form $\sum_{n=1}\infty(b_n - b_{n+1})$ gebracht werden, so kürzen sich alle "mittleren Terme" und wir erhalten als Resultat $b_1 - b_\infty$. Falls dieser Wert nicht $\mp\infty$ ist, so ist die Reihe konvergent.*

**Methode 5.2.** *(Nullfolge) Bilden die Glieder einer Reihe keine Nullfolge, so divergiert die Reihe.*

**Methode 5.3.** *(Summe) Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ zwei konvergente (!) Reihen. Dann konvergiert auch deren Summe/Differenz.*

**Methode 5.4.** *(Majorantenkriterium) Seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n \geq N \in \mathbb{N}$. Falls $\sum a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum b_n$.*

**Methode 5.5.** *(Minorantenkriterium) Seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n \geq N \in \mathbb{N}$. Falls $\sum b_n$ divergiert, so divergiert auch $\sum a_n$.*

**Methode 5.6.** *(Vergleichskriterium). Seien $a_n, b_n > 0$. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$ so haben $\sum a_n$ und $\sum b_n$ dasselbe Konvergenzverhalten.*

**Methode 5.7.** *(Quotientenkriterium) Sei $\sum a_n$ gegeben. Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \implies \textit{Reihe divergiert}$$
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \implies \textit{Reihe konvergiert}$$
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \implies \textit{Kriterium versagt.}$$

**Methode 5.8.** *(Wurzelkriterium) Sei $\sum a_n$ gegeben. Es gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 &\implies \textit{Reihe divergiert}\\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 &\implies \textit{Reihe konvergiert}\\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 &\implies \textit{Kriterium versagt.}\end{aligned}$$

**Satz 5.1.** *(Satz von Cauchy-d'Alembert) Falls beide Grenzwerte existieren, gilt stets*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

*Versagt also eines der Kriterien, versagt auch das andere.*

**Methode 5.9.** *(Integralkriterium) Sei $\sum a_n$ gegeben mit $a_n \geq 0$ und $a_{n+1} \leq a_n$ (monoton fallend), dann konvergiert die Reihe genau dann, wenn das dazugehörige Integral konvergiert.*

**Methode 5.10.** *(Leibnitz-Kriterium) Sei eine alternierende Reihe der Form $\sum(-1)^n a_n$ gegeben. Falls $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_{n+1} \leq a_n$ gilt, konvergiert die Reihe.*

**Methode 5.11.** *(absolute Konvergenz) Wie wir oben gesehen haben, können wir auch einfach überprüfen, ob die Folge absolut konvergent ist.*

**Methode 5.12.** *(Cauchy-Verdichtungskriterium) Sei $a_n \geq 0$ und monoton fallend, dann gilt*

$$\sum a_n \textit{ konvergiert} \iff \sum 2^n a_{2^n} \textit{ konvergiert}$$

**Methode 5.13.** *(Taylorreihe) Wie bei der Grenzwertbestimmung kann uns manchmal auch hier die Taylorreihe vor allem von $e^x$, $\log$ und trigonometrischen Funktionen behilflich sein.*

**Methode 5.14.** *(Kriterium von Raabe) Sei $a_n \geq 0$ und es versage das Quotientenkriterium, also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) =: \alpha$$

*existiert und $\alpha \neq 1$ so gilt*

$$\begin{aligned}\alpha > 1 &\implies \textit{Divergenz}\\ \alpha < 1 &\implies \textit{Konvergenz}\end{aligned}$$

**Wichtig 5.1.** *(Reihen, welche man kennen sollte)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ konvergiert} \iff |q| < 1 \qquad \text{Geometrische Reihe}$$

$$\text{in diesem Falle gilt } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff s > 1 \qquad \text{Riemannsche } \zeta\text{-Funktion}$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{Basler-Problem}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2) \qquad \text{alternierende geom. Reihe}$$

**Satz 5.2.** *(Umordnungssätze)*

1. *Absolut konv. Reihen: Umordnung ändert nichts:* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$
2. *Bedingt konv. Reihen: Riemannscher Umordnungssatz*

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} = A$$

# 6 Potenzreihen

**Definition 6.1.** *(Potenzreihe) Eine Potenzzeihe ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

**Definition 6.2.** *(Konvergenzradius) Eine Potenzreihe hat einen Konvergenzbereich $B_f$ der immer kreisförmig ist. Der Konvergenzradius $\rho$ ist also definiert als*

$$\begin{cases} |x| < \rho & \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \\ |x| > \rho & \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ divergiert} \\ |x| = \rho & \implies \text{ seperat untersuchen} \end{cases}$$

**Formel 6.1.** *(Konvergenzradius) Für den Konvergenzradius $\rho$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gelten folgende Formeln*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

**Satz 6.1.** *(Differentiation der Potenzreihe) Eine Potenzreihe ist im Inneren des Konvergenzkreises diferenzierbar und die Ableitung darf Glied für Glied berechnet werden. (Auch die Integration erfolgt gliedweise im Konvergenzbereich).*

**Formel 6.2.** *(Cauchy-Produkt) Seien* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *und* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien* $\rho_1, \rho_2 > 0$. *Für alle* $|x| < \min \rho_1, \rho_2$ *gilt die Formel*

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) x^n$$

# 7 Stetigkeit

**Definition 7.1.** *(Weierstrass-Kriterium / $\epsilon$-$\delta$-Kriterium) Sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. $f$ ist an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, genau dann wenn*

$$\forall x_0 \in D : \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

*Wir sagen $f$ ist stetig, wenn $f$ an jedem $x_0 \in D$ stetig ist.*

**Methode 7.1.** *(Beweis Stetigkeit) Um zu zeigen, dass eine Funktion stetig ist, kann man $\epsilon$ fix setzen und geht vom Standpunkt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ aus und versucht ein $\delta$ zu finden, welches die Eigenschaft $|x - x_0| < \delta$ erfüllt und von $\epsilon$ und $x_0$ abhängt..*

**Definition 7.2.** *(gleichmässige Stetigkeit) $f$ wie oben definiert, heisst gleichmässig stetig auf $D$, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

**Satz 7.1.** *(Heine) Falls $f$ stetig und $D$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt) ist, so ist die Funktion gleichmässig stetig.*

**Wichtig 7.1.** *Der Unterschied zwischen gleichm. stetig und stetig ist im $\delta$. Denn das $\delta$ darf bei gleichmässiger Stetigkeit nicht von $x, y$ abhängen.*

**Definition 7.3.** *(Lipschitz-Stetigkeit)$f$ heisst Lipschitz-stetig, falls*

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in D \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

**Satz 7.2.** *Eine differenzierbare Funktion $f$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung auf $D$ beschränkt ist.*

**Satz 7.3.** *(Zusammenhang) Es gilt*

$$\begin{aligned} \textit{Lipschitz-Stetigkeit} &\implies \textit{gleichmässige Stetigkeit} \implies \textit{Stetigkeit} \\ \textit{stetig und } D \textit{ kompakt} &\implies \textit{gleichmässige Stetigkeit} \\ f \textit{ differenzierbar und 1. Ableitung beschränkt} &\implies \textit{Lipschitz-Stetigkeit} \end{aligned}$$

**Wichtig 7.2.** *(Beispiele)*

$$\begin{aligned} \textit{stetig aber nicht gleichmässig stetig: } & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \\ \textit{gleichmässig stetig aber nicht Lipschitz-stetig: } & f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x} \\ \textit{Lipschitz-stetig: } & f : [1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

**Satz 7.4.** *(Vektorraum) Stetige Funktionen bilden einen Vektorraum.*

**Satz 7.5.** *(Verknüpfung) Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig.*

**Satz 7.6.** *(Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit f(x)=y.*

**Methode 7.2.** *(Nullstellenproblem) Häufig wird gefragt, ob eine Gleichung $f(x) = g(x)$ eine Lösung im Intervall $[a, b]$ besitzt. Dazu kann eine Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ eingeführt werden. Falls man $x_1, x_2$ in $[a, b]$ so finden kann, dass $h(x_1) < 0$ und $h(x_2) > 0$ gilt, so existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle und somit eine Lösung für $f(x) = g(x)$.*

# 8 Differenzialrechnung

**Definition 8.1.** *(Ableitung) Die Ableitung einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ ist der Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**Definition 8.2.** *(Differenzierbarkeit) Wir nennen eine Funktion $f$ differenzierbar, wenn der Grenzwert in der Definition 8.1 existiert.*

**Methode 8.1.** *(Ableitungsregeln) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es gelten folgende Ableitungsregeln:*

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' && \textit{Summenregel} \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' && \textit{Produktregel} \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} && \textit{Quotientenregel} \\ (g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) && \textit{Kettenregel} \end{aligned}$$

**Satz 8.1.** *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.*

**Wichtig 8.1.** *Die Umkehrung von Satz 8.1 gilt nicht. Gegenbeispiel:* $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. *$f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.*

**Satz 8.2.** *(Umkehrsatz) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in (a,b) : f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}$ differenzierbar mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

*wobei $y = f(x)$.*

**Satz 8.3.** *(Satz von Rolle*) Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall $(a,b)$ differenzierbar ist. Falls $f(a) = f(b)$ gilt, so existiert ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.*

**Satz 8.4.** *(Mittelwertsatz*) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Definition 8.3.** *(Konvexität) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heisst $f$ konvex, falls*

$$\forall x_0, x_1 \in I \; \forall t \in [0,1] : f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$$

*Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst konkav, wenn $f = -g$ konvex ist.*

**Satz 8.5.** *(Konvexität und Ableitung) Sei $f \in C^2(D)$. Dann ist $f$ genau dann konvex, wenn $\forall x \in D : f''(x) \geq 0$.*

# 9 Funktionenfolgen

**Definition 9.1.** *(punktweise Konvergenz) Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir sagen, dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ punktweise konvergiert, falls*

$$\forall x \in D \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

**Definition 9.2.** *(gleichmässige Konvergenz) Wir sagen, dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig konvergiert, falls*

$$\forall x \in D \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

*Der Unterschied zwischen punktweiser und absoluter Konvergenz besteht darin, dass bei gleichmässiger Konvergenz das N unabhängig von den Punkten $x \in D$ ist.*

**Satz 9.1.** *(Zusammenhang) Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz und beide Grenzfunktionen stimmen überein.*

**Wichtig 9.1.** *(Umkehrung) Die Umkehrung gilt nicht. Gegenbeispiel (punktweise aber nicht gleichmässig konvergent): $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$.*

**Satz 9.2.** *Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls $f_n$ gegen $f$ gleichmässig konvergiert, so ist auch $f$ stetig.*

**Satz 9.3.** *(Grenzwert und Integral vertauschen) Sei $f_n$ eine Folge stetiger Funktionen und $[a,b] \subseteq D$. Falls $f_n$ gleichmässig auf $D$ konvergiert, so ist $f$ auf $[a,b]$ integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

# 10 Riemann-Integral

**Definition 10.1.** *(Treppenfunktion) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung $\zeta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ gibt, sodass es für jeses $k \in \{1, ...., n\}$ eine Zahl $c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c_k$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Das Riemann-Integral einer Treppenfunktion ist dann definiert als*

$$\int_a^b f dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

**Definition 10.2.** *(Ober-/Untersumme) Wir definieren folgende zwei Mengen:*

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_a^b u dx | u \text{ Treppenfunktion und } u \leq f \right\} \qquad \text{Untersumme}$$

$$\mathcal{O}(f) = \left\{ \int_a^b o dx | o \text{ Treppenfunktion und } o \geq f \right\} \qquad \text{Obersumme}$$

**Definition 10.3.** *(Riemann-integrierbar) Sei $\underline{I}(f) = \sup \mathcal{U}(f)$ und $\bar{I}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$. Wir nennen $f$ Riemann-integrierbar, falls*

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f) =: \int_a^b f dx$$

**Satz 10.1.** *(Linearität) Die Menge* $\mathcal{R}([a,b])$ *der Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall [a,b] ist ein Vektorraum und das Riemann-Integral ist eine lineare Funktion auf* $\mathcal{R}([a,b])$.

**Satz 10.2.** *(Monotonie) Seien* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. *Folgende Monotonieeigenschaften gelten*

1) *Falls* $f \geq 0,$, *so gilt* $\displaystyle\int_a^b f dx \geq 0$

2) *Falls* $f \leq g,$, *so gilt* $\displaystyle\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

3) *Es gilt stets* $\displaystyle\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$

4) *Die Funktion* $|f|$ *ist Riemann-integrierbar und es gilt die Dreiecksungleichung*

$$\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

**Satz 10.3.** *(ungerade Funktionen) Falls* $f(-x) = -f(x)$ *gilt, nennen wir* $f$ *ungerade. Es gilt dann*

$$\int_{-a}^a f dx = 0$$

**Satz 10.4.** *(Monotonie und Beschränktheit) Jede (stückweise) monotone und beschränkte Funktion ist Riemann-integrierbar.*

**Satz 10.5.** *(Stetigkeit) Jede (stückweise) stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.*

**Definition 10.4.** *(Stammfunktion) Wir nennen* $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ *die Stammfunktion von* $f$

**Satz 10.6.** *(Fundamentalsatz) Sei* $f$ *bei* $x_0 \in [a,b]$ *stetig. Dann ist* $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *bei* $x_0$ *differenzierbar und* $F'(x_0) = f(x_0)$. *Des weiteren gilt*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

**Definition 10.5.** *(Gamma-Funktion) Die Gamma-Funktion ist gegeben durch*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^x dx$$

*Sie erfüllt ausserdem:* $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ *und somit* $\Gamma(n+1) = n!$

## 11 Integrale berechnen

**Wichtig 11.1.** *(Wichtige Integrale)*

| $f(x)$ *(Integrand)* | $F(x)$ *(Stammfunktion)* |
|---|---|
| $x^\alpha (\alpha \neq -1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\log(x) + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\alpha^x$ | $\frac{\alpha^x}{\log(\alpha)} + C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x) + C$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x) + C$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x) + C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x) + C$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos(x) + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{arcsinh}(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arccosh}(x) + C$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{arctanh}(x) + C$ |

**Methode 11.1.** *(Direkte Integrale) Haben wir ein Integral der Form $\int f(g(x))g'(x)dx$, dann gilt*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

*wobei $F(x)$ die Stammfunktion von $f$ ist.*

**Methode 11.2.** *(Partielle Integration) Die partielle Integration erlaubt die Integration von Produkten. Es gilt*

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx + C$$

*Der grosse Vorteil dieser Methode ist es, dass $f$ nicht integriert werden muss. Vor allem Arc-Funktionen und $x^\alpha$ sollten nur abgeleitet werden.*

**Methode 11.3.** *(Partialbruchzerlegung) Falls ein Integral der Form* $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ *gegeben ist, gibt es zwei Techniken, dieses Integral zu bestimmen:*

$$\text{1) Falls } \deg(p) \geq \deg(q) \implies \text{führe die Polynomdivision } p(x) : q(x) \text{durch}$$
$$\text{2) Falls } \deg(p) \leq \deg(q) \implies \text{führe Partialbruchzerlegung (PBZ) durch}$$

**Methode 11.4.** *(Substitution) Die wohl wichtigste Methode neben der partiellen Integration ist die Substitutionsregel: Sei ein beliebiges Integral* $\int f(x)dx$ *gegeben. Wir können mit der Substitution* $u = g(x)$ *und somit* $x = g^{-1}(u)$ *das Integral umschreiben in* $\int f(g(x))g'(x)dx$*. Dabei muss auch beachtet werden, dass die Grenzen angepasst werden.*

**Wichtig 11.2.** *(Gute Substitutionen)*

| *Funktion enthält* | *nützliche Substitution* |
|---|---|
| $e^x, \sinh(x), \cosh(x)$ | $u = e^x$ |
| $\log(x)$ | $u = \log(x)$ |
| $\sqrt[n]{Ax+B}$ | $u = \sqrt[m]{Ax+B}(m \leq n)$ *evtl. mehrere* |
| $\cos^2(x), \sin^2(x), \cos^4(x)..., \tan(x)$ | $u = \tan(x)\,*$ |
| $\sin(x), \cos(x), \sin^3(x), ...$ | $u = \tan(\frac{x}{2})\,*$ |
| $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ | *quadratische Ergänzung* |
| $\sqrt{1-x^2}$ | $x = \sin(t)$ |
| $\sqrt{x^2-1}$ | $x = \cosh(t)$ |
| $\sqrt{x^2+1}$ | $x = \sinh(t)$ |

## 12 Topologie

**Definition 12.1.** *(Topologie) Sei $X$ eine beliebige Menge. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heisst Topologie, falls*

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $U_1, ..., U_n \in \tau \implies \bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$
3. $\{U_1, ..., U_k$ *für* $k \in I\} \in \tau \implies \bigcup_{k \in I} U_k \in \tau$

**Definition 12.2.** *(Metrik) Sei $X$ eine nicht leere Menge. Eine Metrik auf $X$ ist einfach eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, welche jedem Paar $(x, y)$ aus $X \times X$ eine reelle Zahl zuordnet, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind*

1. $d(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(positiv definit)*
2. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$ *(symmetrisch)*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X$ *(Dreiecksungl.)*

**Definition 12.3.** *(Norm) Sei $V$ ein reeller (oder komplexer) Vektorraum. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}, v \mapsto \|v\|$$

*heisst Norm auf V, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind*

1. $\|v\| \geq 0\ \forall v \in V$ *und* $\|v\| = 0 \iff v = 0$ *(positiv definit)*
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|\ \forall v, w \in V$ *(Dreiecksungl.)*
3. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|\ \forall v \in V$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

*Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum. Denn die Norm $\|\cdot\|$ induziert immer eine Metrik wie folgt:*

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

**Definition 12.4.** *(Offene und abgeschlossene Teilmengen). Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heisst offen, falls es zu jedem Punkt in $O$ einen offenen Ball um diesen Punkt gibt, der in $O$ liegt. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst abgeschlossen, falls ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist. ($X$ selber und $\emptyset$ sind sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmengen)*

**Satz 12.1.** *(Korollar zur Definition der Topologie) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, dann gilt*

1. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
2. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*
3. *Der Durchschnitt belieblig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
4. *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

**Definition 12.5.** *(induzierte Topologie mit Metrik) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Die induzierte Topologie ist definiert durch*

$$U \in \tau \iff \forall x \in U\ \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq U$$

**Definition 12.6.** *(innerer Punkt/Innere) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in Y$ heisst innerer Punkt von $Y$, falls es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq Y$ gibt. Die Menge aller inneren Punkte*

$$\overset{\circ}{Y} = \{x \in Y | \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subseteq Y\}$$

*wird das Innere von $Y$ genannt.*

**Definition 12.7.** *(Randpunkt/Rand) Ein Punkt $x \in X$ ist ein Randpunkt von $Y$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ beide Durchschnitte $b_\epsilon(x) \cap Y$ und $b_\epsilon(x) \cap X \backslash Y$ nicht leer sind. Die Menge aller Randpunkte nennen wir den Rand von $Y$ und schreiben $\partial Y$.*

**Definition 12.8.** *(Abschluss) Der Abschluss einer Menge wird durch $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ definiert.*

**Definition 12.9.** *(Hausdorffeigenschaft) $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists x \in U \in \tau, y \in V \in \tau : U \cap V = \emptyset$*

**Definition 12.10.** *(diskrete Topologie) Wir nennen $\tau = \mathcal{P}(X)$ die diskrete Topologie. Sie ist hausdorff'sch.*

**Definition 12.11.** *(indiskrete Topologie) Wir nennen $\tau = \{\emptyset, X\}$ die indiskrete Topologie. Sie ist nicht hausdorff'sch.*

**Satz 12.2.** *Jede von einer Metrik induzierte Topologie ist hausdorff'sch.*

**Definition 12.12.** *(Häufungspunkt) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist ein Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_n \in X$ falls eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ existiert mit Grenzwert $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist ein Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subseteq X$, falls für jedes $\epsilon > 0$ der Durchschnitt $D \cap (B_\epsilon(x_0) \backslash \{x_0\})$ nicht leer ist. Eine Teilmenge heisst dicht, wenn sie nur aus Häufungspunkten besteht.*

**Satz 12.3.** *(Stetigkeit) Seien $X$ und $Y$ zwei topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen, offen sind.*

**Methode 12.1.** *(gleichmässige und Lipschitz-Stetigkeit) Wir können auch die Definitionen für gleichmässige und Lipschitz-Stetigkeit neu definieren indem wir in den Definitionen jeweils die Betragsstriche durch die Metrik ersetzen.*

**Definition 12.13.** *(Kompaktheit) 7 Charakterisierungen auf metrischen Räumen*

1. *Topologische Kompaktheit: Jede offene Überdeckung von $X$ hat eine endl. Teilüberdeckung.*
2. *Folgenkompaktheit: Jede Folge hat einen (Folgen-)Häufungspunkt*
3. *Jede unendliche Teilmenge von $X$ hat einen (Mengen-)Häufungspunkt*
4. *Jede $f : X \to \mathbb{R}$ stetig ist beschränkt*
5. *Jede $f : X \to \mathbb{R}$ stetig nimmt ihr Max und Min an*
6. *Jede offene Überdeckung hat Lebesgue-Zahl und ist total beschränkt*
7. *Der metrische Raum $X$ ist beschränkt und vollständig (Jede Cauchy-Folge konvergiert)*

**Satz 12.4.** *(Satz von Heine-Borel) Eine Teilmenge $K \subseteq R^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

**Definition 12.14.** *(Zusammenhang) $X$ top. Raum, $X$ heisst zusammenhängend falls die einzigen abgeschlossenen und offenen Mengen $X$ und $\emptyset$ sind. $Y \subseteq X$ heisst zmh. falls es das ist bzgl. der Teilraumtopologie.*

**Satz 12.5.** *(Sätze zu Zusammenhang)*

1. $A, B \subseteq X$ *zsmh.:* $A \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B$ *zsmh.*
2. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *zsmh. und $A$ enthält Häufungspunkt von $B$* $\implies A \cup B$ *zsmh.*
3. $A \subseteq \mathbb{R}$ *ist zsmh.* $\iff$ *$A$ ist ein Intervall* $\iff \forall a, b \in A : \forall a \leq c \leq b : c \in A$
4. $A \subseteq X$ *zsmh.* $f : X \to Y$ *stetig* $\implies f(A)$ *ist zsmh.*

**Definition 12.15.** *(wegzusammenhängend) Ein nichtleerer metrischer Raum $X$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.*

**Satz 12.6.** *(zwei kleine Sätze)*

1. *Ist $X$ wegzusammenhängend, so auch $f(X)$.*
2. *Ist $X$ zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

**Definition 12.16.** *(Homotopie) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Seien $\gamma_1 : [a, b] \to U$ und $\gamma_2 : [a, b] \to U$ zwei Kurven in $\mathbb{R}^n$ mit demselben Anfangspunkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und demselben Endpunkt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Die zwei Kurven $\gamma_1$ und $\gamma_2$ heissen homotop (geschrieben $\gamma_1 \simeq \gamma_2$), wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to U$ gibt, die wir Homotopie nennen und die folgenden Eigenschaften erfüllt*

1. $\forall t \in [0, 1] : H(0, t) = \gamma_1(t)$
2. $\forall t \in [0, 1] : H(1, t) = \gamma_2(t)$
3. $\forall s \in [0, 1] : H(s, 0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$
4. $\forall s \in [0, 1] : H(s, 1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$

**Definition 12.17.** *(einfach zusammenhängend) Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend, falls je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop sind.*

**Bemerkung 12.1.** *Ein Gebiet ist also dann zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in einen Punkt zusammengezogen werden kann.*

**Satz 12.7.** *(Zusammenhang)*

$$\text{einfach zusammenhängend} \implies \text{wegzusammenhängend} \implies \text{zusammenhängend.}$$

**Methode 12.2.** *(Beispiele)*

1. $X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(t, \sin(\frac{1}{t}))|t > 0\}$ *ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend.*
2. $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *wegzusammenhängend aber nicht einfach zsmh.*
3. $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ *ist einfach zsmh.*

**Satz 12.8.** *(auf metrischen Räumen) Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.*

**Satz 12.9.** *(Banach'scher Fixpunktsatz) Sei $(X,d)$ ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ eine Lipschitz-Kontraktion, das heisst, eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$$

*für alle $x_1, x_2 \in X$ und für eine fixe Lipschitz-Konstante $\lambda < 1$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$.*

# 13 Mehrdimensionale Differenzialrechnung

**Definition 13.1.** *(totale Differenzierbarkeit) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in einem Punkt $x_0$ falls eine lineare Abbildung $D_{f(x_0)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left\| f(x_0 + x) - f(x_0) - D_{f(x_0)}(x) \right\|}{\|x\|} = 0$$

**Formel 13.1.** *Beispiel: Für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt:*

$$D_{f(x_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial f_3(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x_0)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x_0)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

**Formel 13.2.** $D_{x_0}(g \circ f) = D_{f(x_0)} g \circ D_{x_0} f$

**Satz 13.1.** *(totale Differenzierbarkeit)*

1. *$f$ ist total differenzierbar in $x_0 \implies$ Alle part. Ableitungen existieren und $\partial_v f(x_0) = D_{f(x_0)}(v)$*
2. *Wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, so ist $f$ total differenzierbar.*

**Satz 13.2.** *(Satz von Schwarz) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann gilt*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$

**Definition 13.2.** *(kritischer/regulärer Punkt) Ein Punkt $x \in U$ heisst kritischer Punkt von einer differenzierbaren Funktion, falls $D_x f = 0$. Weiter nennt man $x \in U$ regulär, wenn er kein kritischer Punkt von $f$ ist.*

**Definition 13.3.** *(Hesse Matrix)Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Hesse-Matrix von $f$ am Punkt $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ definiert durch*

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

**Definition 13.4.** *(Definitheit der Hessematrix) Ist die Hesse-Matrix positiv definit, dann haben wir ein Maximum, falls sie negativ definit ist, dann ein Minimum und falls sie indefinit ist, dann kann man keine Aussage darüber machen.*

**Definition 13.5.** *(Wegintegral) Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das Wegintegral des Vektorfelds $f$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to U$ durch*

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds$$

# 14 Differentialgeometrie

**Satz 14.1.** *(Satz über implizite Funktionen) Sie $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Seien $(x_0, y_0) \in U$ mit $F(x_0, y_0) = 0$. Angenommen*

1. *Alle partiellen Ableitungen existieren auf $U$ und sind stetig*
2. *Die Matrix $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{i,j=1,\ldots,m}$ ist invertierbar.*

*dann gibt es $\alpha, \beta > 0$ und eine eindeutige Abbildung $f : B_\alpha(x_0) \to \mathbb{R}^m$ sodass*

$$\forall (x, y) \in B_\alpha(x_0) \times B_\beta(y_0), F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

*Ist $F$ $d$-mal stetig differenzierbar, so ist auch $f$ $d$-mal stetig differenzierbar und es gilt*

$$D_x f = -(\partial_y F(x, f(x)))^{-1} \partial_x F(x, f(x))$$

*mit $x \in B_\alpha(x_0)$*

**Satz 14.2.** *(Satz zur inversen Abbildung) Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $d$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in U$ mit invertierbarer totaler Ableitung $D_{x_0} f$ (bzw. $x_0$ ist regulär). Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von $x_0$ und eine offene Umgebung $V_0 \subseteq f(U)$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenso $d$-mal stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt*

$$\forall x \in U_0, y = f(x) \in V_0 : D_y(f^{-1}) = (D_x f)^{-1}$$

**Definition 14.1.** *(Diffeomorphismus) Eine glatte bijektive Funktion $f$ heisst Diffeomorphismus, falls $f$ invertierbar ist und $f^{-1}$ glatt ist.*

**Definition 14.2.** *(Teilmannigfaltigkeit) Sei $0 \leq k \leq n$ für $n \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine $k$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, falls für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U_p \in \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Phi_p : U_p \to V_p = \Phi_p(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass*

$$\Phi_p(U_p \cap M) = \{y \in V_p | y_i = 0 \forall i > k\}$$

**Satz 14.3.** *(Teilmannigfaltigkeit) Jede offene Teilmenge $U$ in $\mathbb{R}^n$ ist eine $n$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.*

**Satz 14.4.** *(Satz vom konstanten Rang) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $F : U \to \mathbb{R}^m, m \leq n$ glatt. $M := F^{-1}\{0\} = \{x \in U | F(x) = 0\}$. Falls jeder Punkt $p_0 \in M$ regulär ist (d.h. $df(p_0) = m$), dann ist $M$ eine TMF von Dimension $k = n - m$.*

**Definition 14.3.** *(Tangentialraum)Der Tangentialraum der Teilmannigfaltigkeit $M$ bei $p \in M$ ist gegeben durch*

$$T_p M = \{(p, \gamma'(0)) | \exists \epsilon > 0, \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = p\}$$

**Definition 14.4.** *(Tangentialbündel) Das Tangentialbündel von $M$ ist definiert durch*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

**Definition 14.5.** *(Lagrange-Funktion) Die Lagrange-Funktion $L : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist durch*

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j(x)$$

*definiert. Die Komponenten von $\lambda$ werden auch Lagrange-Multiplikatoren genannt.*

# 15 Mehrdimensionale Integralrechnung

**Definition 15.1.** *(Riemann-Integrierbarkeit) Sei $Q$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ zwei stetige Funktionen $f_-, f_+$ gibt, die $f_- \leq f \leq f_+$ und*

$$\int_Q (f_+ - f_-) dvol < \epsilon$$

**Definition 15.2.** *(Lebesgue-Nullmenge) $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Lebesgue-Nullmenge, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_t)_t$ von offenen oder abgeschlossenen Quadern gibt, sodass*

$$N \subseteq \bigcup_{t=1}^{\infty} Q_t \text{ und } \sum_{t=1}^{\infty} vol(Q_t) < \epsilon$$

**Satz 15.1.** *(Eigenschaften von Lebesgue-Nullmengen)*

1. *Eine Teilmenge einer L-Nullmenge ist eine L-Nullmenge*
2. *Abzählbare Vereinigung von L-Nullmengen sind wieder L-Nullmengen*

**Satz 15.2.** *(Lebesgue-Kriterium) Sei $f$ beschränkt auf einem abgeschlossenen Quader $Q$. Dann ist $f$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen eine L-Nullmenge ist.*

**Definition 15.3.** *(Jordan-Messbarkeit) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-messbar, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $B \subseteq Q$ und die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B$ auf $Q$ Riemann-integrierbar ist. Das Volumen ist in diesem Fall*

$$vol(B) = \int_Q \mathbb{1}_B dvol$$

**Definition 15.4.** *(Jordan-Nullmenge) Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-Nullmenge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Liste $Q_1, ..., Q_L \subseteq \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, sodass*

$$\mathcal{J} \subseteq \bigcup_{t=1}^{L} Q_t \text{ und } \sum_{t=1}^{L} vol(Q_t) < \epsilon$$

**Satz 15.3.** *(Jordan-Messbarkeit und Jordan-Nullmenge)*

$$\mathcal{J} \text{ ist eine Jordan-Nullmenge} \iff \mathcal{J} \text{ ist Jordan-messbar und } vol(\mathcal{J}) = 0$$

**Satz 15.4.** *(Jordan und Lebesgue) Lebesgue-Nullmenge $\implies$ Jordan-Nullmenge*

**Satz 15.5.** *(Satz von Fubini) Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei abgeschlossene Quader und sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dvol((x,y)) = \int_X \int_Y f(x,y)dydx = \int_Y \int_X f(x,y)dxdy$$

**Definition 15.5.** *(mehrdimensionale Substitution) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi$ ein Diffeomorphismus $\Phi : X \to Y$. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt (und ist wohldefiniert):*

$$\int_Y f(y)dy = \int_X f \circ \Phi(x) \cdot |\det D\Phi(x)|dx$$

# 16 Integralsätze

**Definition 16.1.** *(konservativ) $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heisst $f$ konservatov, falls für alle stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma : [a,b] \to U$ und $\eta : [a',b'] \to U$ mit $\gamma(a) = \eta(a')$ und $\gamma(b) = \eta(b')$ gilt*

$$\int_\gamma f ds = \int_\eta f ds.$$

**Satz 16.1.**

$$F \textit{ konservativ} \implies \forall\gamma \textit{ geschlossen}: \int_\gamma F dt = 0$$

**Satz 16.2.** *(Integrabilitätsbedingung) $\partial_i F_j = \partial_j F_i \implies \forall \gamma_1, \gamma_2$ homotop ist: $\int_{\gamma_1} F dt = \int_{\gamma_2} F dt$*

**Satz 16.3.** *(Divergenzsatz in der Ebene) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit glattem Rand, $U$ eine offene Teilmenge sodass $B \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_B \mathrm{div}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f d\mathbf{n}$$

**Satz 16.4.** *(Satz von Green/Rotationssatz) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit glattem Rand, $U$ eine offene Teilmenge sodass $B \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_B \mathrm{rot}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f d\mathbf{s}$$

*wobei* $\mathrm{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$

**Satz 16.5.** *(Satz von Gauss (Divergenzsatz im dreidimensionalen Raum)) Es sei $B$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich mit $V \subseteq U$. Es sei das Vektorfeld $\mathbf{v}$ auf ganz $V$ definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_B \mathrm{div}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{n}$$

**Satz 16.6.** *(Satz von Stokes (im dreidimensionalen Raum)) Sei $f$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \in \mathbb{R}^3$. Ist $S \subseteq U$ eine glatt berandete, orientierbare Fläche (mit Rand), so gilt*

$$\int_S \mathrm{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{n} = \int_{\partial S} f \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s}$$

*wobei* $\mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$

# 17 Satz von Picard-Lindelöf

**Satz 17.1.** *(Picard-Lindelöf*)* $d \geq 1, U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, (t_0, x_0) \in U, F : U \to \mathbb{R}^d$ *F lokal Lipschitzstetig. Dann* $\exists I \subseteq \mathbb{R}$ *Intervall und* $\exists u : I \to \mathbb{R}$ *diffbar, sodass*

1. $(t, u(t)) \in U, \forall t \in I$ *und* $\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$ *(Existenz)*
2. *Jede weitere Funktion u mit der Eigenschaft aus 1) auf offenem Intervall* $J \subseteq I$ *ist eingeschränkt. (Eindeutigkeit)*
3. $I = (a, b)$ *mit* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \implies \nexists \lim_{t \to a,b} (t, u(t))$ *nicht in* $U$. *(Maximalität des Intervalls)*

**Bemerkung 17.1.** *(Aussage des Satzes Picard-Lindelöf) Es existiert eine eindeutige Lösung einer genügend schönen DGL.*