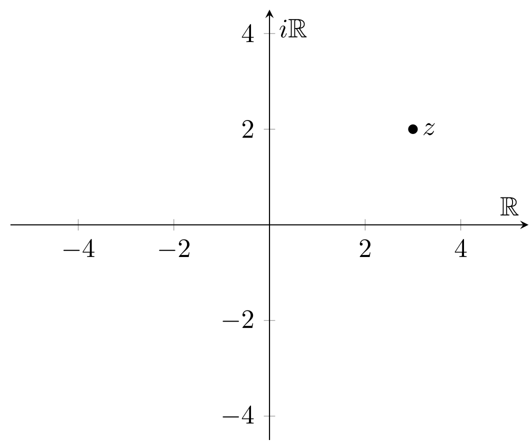
KOMPLEXE ZAHLEN

Übungsstunde Analysis I

Hrvoje Krizic

1 Definition und Rechenregeln

Um die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können, definieren wir die imaginäre Einheit i welche die Eigenschaft $i^2 = -1$ haben soll. Eine komplexe Zahl definieren wir dann als ein Vielfaches dieser imaginären Einheit plus eine reelle Zahl. Also $z = x + iy$, wobei x, y beide reelle Zahlen sind. Wir nennen x den Realteil der komplexen Zahl (Re(z)= x) und y denn Imaginärteil (Im(z)= y).
In der Grundstufe lernt man reelle Zahlen auf einem sogenannten Zahlenstrahl einzuzeichnen. Damit wir uns nun komplexe Zahlen bildlich vorstellen können, erweitern wir den Zahlenstrahl zu einer Zahlenebene. Die rellen Zahlen (in unserem Fall also $y = 0$) liegen dabei immernoch auf der x-Achse dieser Ebene (oder Koordinatensystems). Wir können nun beispielsweise $z = 3 + 2i$ einzeichnen, indem wir den Punkt $(3 \mid 2)$ in der komplexen Ebene markieren.



Allgemein ist also der Punkt z gegeben durch $(\text{Re}(z) \mid \text{Im}(z))$. Die komplexe Zahlenebene veranschaulicht auch das Problem, dass wir komplexe Zahlen nicht vergleichen können. Ob $-2+3i$ oder $-1+2i$ grösser ist, lässt sich also nicht beantworten. Ob zwei komplexe Zahlen gleich sind hingegen schon. Wir schreiben nämlich $z_1 = z_2$ genau dann, wenn $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ und $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$

Wie schon mit den Zahlen in $\mathbb{R}$, können wir auch mit komplexen Zahlen rechnen. Die Rechenregeln folgen dabei ziemlich intuitiv aus den reellen Zahlen. Wir gehen nach folgendem Rezept vor:

Rezept. (Rechnen mit komplexen Zahlen)

1. Fasse die imaginäre Einheit i als Variable auf.
2. Klammere alle Terme aus und rechne normal wie mit den reellen Zahlen.
3. Führe das Resultat auf folgende Form zurück: $A + iB$, wobei A und B irgendwelche reelle Terme ohne i sind.

(Beachte, dass man $i^2 = -1$ setzen kann und $i^3 = -i$ etc.)

Eine Ausnahme zum obigen Rezept ist die Division. Diese wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Beispiel. *Berechne* $(1+4i)\cdot(3-2i)$

Lösung.

$$\begin{aligned}(1+4i)\cdot(3-2i) &= 3+12i-2i-8i^2\\ &= 3+10i+8\\ &= 11+10i\end{aligned}$$

Beispiel. *Berechne* $(-i)^5$

Lösung.

$$\begin{aligned}(-i)^5 &= (-1)^5\cdot i^5\\ &= (-1)\cdot i^2\cdot i^2\cdot i\\ &= (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot i\\ &= -i\end{aligned}$$

wobei wir den Trick benutzt haben, eine Negative Zahl $-a$ *als Produkt von* (-1) *und* a *aufzufassen (in unserem Fall* $a := i$*).*

1.1 Komplexe Konjugation und Betrag

Wir führen zwei weitere Definitionen ein:

1. Für $z = x+iy$ nennen wir $\bar{z} = x-iy$ die komplexe Konjugation von z.
2. Sei $z = x+iy$. Wir nennen $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ den Betrag von z.

Wir können mithilfe von Pythagoras leicht überprüfen, dass in der komplexen Ebene der Abstand von z zum Ordinatenursprung $(0 \mid 0)$ genau dem Betrag von z entspricht. Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse (x-Achse). Ausserdem bemerken wir, dass der Betrag immer reell ist, da x und y beide reell sind und x^2+y^2 positiv ist. Eine wichtige Beziehung der beiden Begriffe ist $|z|^2 = \bar{z}\cdot z$.

Beispiel. *Beweise die Beziehung* $|z|^2 = \bar{z}\cdot z$*.*

Lösung.

$$\begin{aligned}\bar{z} \cdot z &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 - (iy)^2 \\ &= x^2 - i^2 y^2 \\ &= x^2 - (-1)y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichung die dritte binomische Formel benutzt haben.

Wir möchten nun die Division der komplexen Zahlen verstehen. Wir wenden hierzu das Rezept aus dem letzten Abschnitt für den Zähler und Nenner separat an. Das wichtigste dabei ist, dass wir den Bruch $\frac{a+ib}{c+id}$ in die Form $x+iy$ bringen wollen. Dazu wenden wir folgendes Rezept an

Rezept. (Division zweier komplexen Zahlen $\frac{z_1}{z_2}$)

1. Multipliziere sowohl Zähler als auch Nenner mit dem komplex Konjugierten des Nenners.
2. Du erhältst nun im Nenner (wegen der Beziehung, welche wir hergeleitet haben) $|z_2|^2$.
3. Führe den Zähler auf die Form $a+ib$ zurück. Du erhältst nun $\frac{a+ib}{|z_2|^2}$
4. Wir können nun den Bruch in zwei Teile teilen (einen Realteil und Imaginärteil) und erhalten $\frac{a}{|z_2|^2} + i\frac{b}{|z_2|^2}$

Wir wollen nun dieses Verfahren anhand einiger Beispiele anwenden

Beispiel. *Berechne* $\frac{3+i}{3-i}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{3-i} &= \frac{(3+i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} \\ &= \frac{3^2+6i+i^2}{3^2+1^2} \\ &= \frac{8+6i}{10} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\end{aligned}$$

Beispiel. *Berechne* $\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{\sqrt{2}i} &= \frac{(1+i)\cdot(-\sqrt{2}i)}{\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

Beachte hier im zweiten Schritt, dass das komplex Konjugierte von $\sqrt{2}i$ *genau* $-\sqrt{2}i$ *ist, da wir auch* $0+\sqrt{2}i$ *schreiben können.*

Beispiel. *Für welche komplexe Zahl* z *gilt:* $1+i+\frac{1}{z} = 2+3i$

Lösung. *Wir formen um, dass nur noch* z *auf einer Seite steht.*

$$\begin{aligned}1+i+\frac{1}{z} = 2+3i &\iff \frac{1}{z} = 1+2i \\ &\iff z = \frac{1}{1+2i}\end{aligned}$$

Wir erhalten nun wie bekannt

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{1+2i} \\ &= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{1-2i}{1^2+2^2} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

Beispiel. *Zeige, dass* $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ *gilt.*

Lösung. *Sei $z = a + ib$ und $w = c + id$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \overline{a + ib + c + id} \\ &= \overline{a + c + i(b + d)} \\ &= a + c - i(b + d) \\ &= a + c - ib - id \\ &= a - ib + c - id \\ &= \overline{z} + \overline{w}\end{aligned}$$

2 Umrechnen Polarform in Normalform und vice versa

Wir können komplexe Zahlen entweder durch Real- (x) und Imaginärteil (y) ausdrücken:

$$z = x + iy$$

oder aber mithilfe des Abstandes r zum Koordinatenursprung zur komplexen Zahl und dem Polarwinkel zur x-Achse φ:

$$z = re^{i\varphi}$$

Der Winkel φ ist nicht eindeutig, wie wir später sehen werden. Denn wenn wir zu ϕ ein Vielfaches von 2π dazuaddieren, erhalten wir die gleiche Zahl (wir drehen uns dann einfach mehrmals im Kreis in der Gauss'schen Ebene). Wir wählen deswegen häufig $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und nennen dies das **Argument** der komplexen Zahl. Wir schreiben $\arg(z)$. Wie erhalten wir nun die Polarform aus der Normalform?

Rezept. (Umrechnung von Normalform zur Polarform einer komplexen Zahl $z = x + iy$)

1. Wir bestimmen zunächst den Radius der komplexen Zahl mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Nun bestimmen wir den Winkel φ, den die komplexe Zahl mit der reellen Achse bildet. Wir betrachten hierbei zwei Fälle.
   (a) z liegt im 1. oder 4. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$
   (b) z liegt im 2. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$
   (c) z liegt im 3. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) - \pi$

   Im Sonderfall von $x = 0$ gilt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $y > 0$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $y < 0$.
3. Wir schreiben nun $z = re^{i\varphi}$ mit den aus den Schritten 1 und 2 bestimmten Parameter.

$\arctan(x)$-Werte können von folgender Tabelle abgelesen werden:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

wobei zu beachten ist, dass $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.
Die Umrechnung von Polarform zur Normalform erfolgt durch das Anwenden der Eulerschen Formel.

Merken. Sei also $z = e^{i\varphi}$ die Polarform der komplexen Zahl. Dann gilt

$$z = r\cos(\varphi) + i \cdot r\sin(\varphi).$$

2.1 Potenzen

Für Potenzen, beispielsweise

$$(1+\sqrt{3}i)^8$$

immer zuerst die komplexe Zahl in Polarform umwandeln und dann potenzieren, denn es gilt

Merken.

$$z = re^{i\varphi} \implies z^n = r^n e^{in\varphi}$$

In unserem Beispiel erhält man $z^8 = 128 \cdot (-1+\sqrt{3}i)$ (Versuche dies zu zeigen!) mit $z = 1+\sqrt{3}i$.

2.2 Trigonometrische Identitäten

Mithilfe der Polarform, können wir auch viele der trigonometrischen Identitäten zeigen. Es gilt:

Merken.

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

Der Beweis ist einfach. Denn die linke Seite ergibt e^{inx} und die rechte Seite ergibt $(e^{ix})^n$. Aus den Potenzgesetzen folgt die Eigenschaft.

Beispiel. *Zeige die trigonometrische Identitäten*

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Lösung. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\cos(2x) + i\sin(2x) &= (\cos(x) + i\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + i \cdot 2\sin(x)\cos(x) + i^2\sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + i \cdot 2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Wir haben $z_1 = z_2$ genau dann, wenn der Realteil jeweils übereinstimmt und der Imaginärteil übereinstimmt. Es gilt also

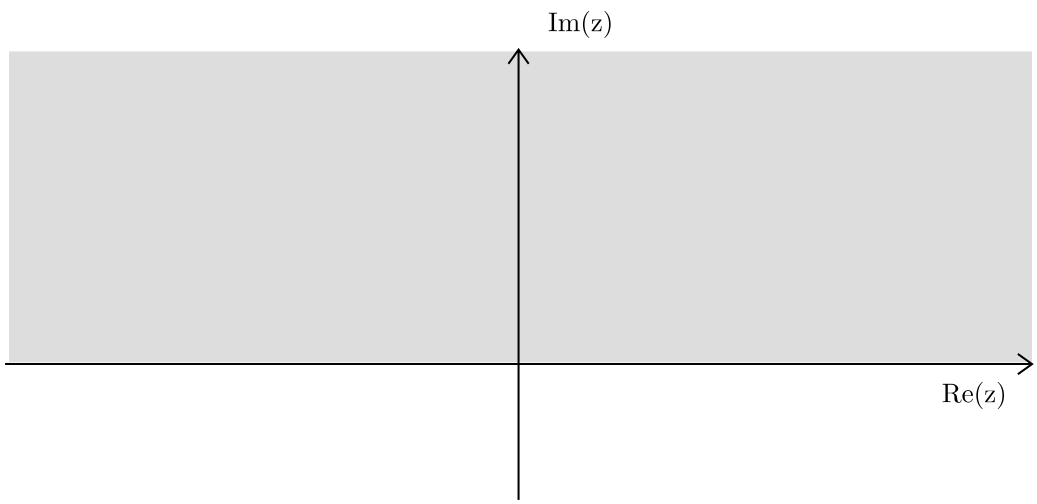
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

3 Komplexe Zahlen in Ebene einzeichnen

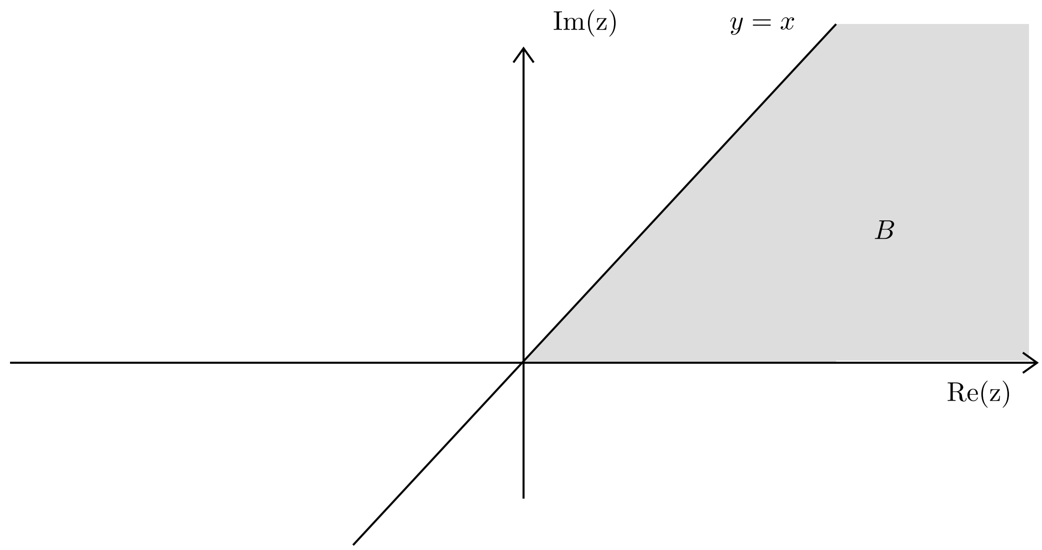
In dieser Aufgabe wird eine Menge gegeben, beispielsweise

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)\}$$

Hier kann man $\mathrm{Im}(z)$ durch y ersetzen und $\mathrm{Re}(z)$ durch x. Dann zeichnet man Bedingung für Bedingung ein. Zunächst also $y > 0$, das heisst y ist immer positiv und wir befinden uns auf der oberen Halbebene:



Nun kommt hinzu, dass $x > y$. Das heisst, wir möchten alle Punkte, die einen grösseren x-Wert haben, als y. Das sind genau alle Punkte unter der Geraden $y = x$. Und somit ist die gesuchte Menge die folgende:



Zusammengefasst kann man also nur Folgendes sagen:

Trick. $\mathrm{Im}(z) \to y$ und $\mathrm{Re}(z) \to x$ umwandeln und der Reihe nach die Flächen aufzeichnen. Üben, üben, üben!

Wir können auch Kreis in unserer komplexen Ebene zeichnen. Denn die Bedingung

$$|z - z_0| \leq R$$

entspricht genau dem ausgefüllten Kreis mit Radius R und Mittelpunkt z_0. Wieso eigentlich? $|z - z_0|$ ist genau die Distanz des Punktes z zum gegebenen Punkt z_0. Alle z welche $|z - z_0| = R$ erfüllen, liegen also auf einem Kreis, denn das sind alle z, welche denselben Abstand zu z_0 haben, eben genau den Abstand R. Wenn wir nun $\leq R$ haben, so wollen wir alle z, welche den Abstand R oder kleiner als R zu z_0 haben. Letzteres bildet also eine Kreisfläche.

4 Fundamentalsatz der Algebra

Wir wissen, dass Gleichungen in vielen Fällen mehr als nur eine Lösung haben können. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ zwei relle Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ hat eine reelle Lösung $x = 1$. Wir wissen aber nun aus dem Abschnitt davor, dass die n-te Wurzel einer Zahl genau n komplexe Lösungen hat. Somit hat $x^3 - 1 = 0$ genau 3 komplexe Lösungen. Die Frage ist nun, wie viele Lösungen die Gleichung $x^5 - x^3 + 2x + 1 = 0$ hat. 1799 formulierte Carl Friedrich Gauss einen Satz, der genau diese Frage beantwortet. Den Fundamentalsatz der Algebra.

Satz. *Jedes Polynom vom Grad n*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \ \textit{mit } a_k \in \mathbb{C}$$

hat genau n komplexe Nullstellen.

$x^5 - x^3 + 2x + 1 = 0$ hat also genau 5 Nullstellen. Dabei sind jedoch einige Dinge zu beachten. Das Polynom zerfällt in n Faktoren $p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ wobei z_k die Nullstellen sind. Hierbei kann auch ein z_k mehr als nur einmal vorkommen. Diese Nullstelle besitzt dann eine "Vielfachheit" grösser als 1. Die Nullstellen im Fundamentalsatz der Algebra werden also mit Vielfachheit gezählt.

Beispiel. *Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion* $f(z) = \frac{2z^4+z}{z} (z \neq 0)$

Lösung. *Es gilt* $f(z) = \frac{2z^4+z}{z} = 2z^3 + 1$ *und somit hat* $f(z)$ *genau drei Nullstellen nach dem Fundamentalsatz der Algebra.*

Beispiel. *Bestimme die Linearfaktorzerlegung von* $z^2 + 1$.

Lösung. *Da* $z^2 + 1$ *ein Polynom zweiten Grades ist, hat es auch zwei Nullstellen für die also* $z^2 + 1 = 0$ *gilt. Wir formen etwas um und erhalten* $z^2 = -1$. *Somit sind die zweiten Wurzeln von* -1 *gesucht. Wir wissen, dass i sicherlich eine Nullstelle ist. Also gilt* $z^2 + 1 = (z - i)(z - z_2)$ *und wir finden mit etwas rechnen* $z_2 = -i$

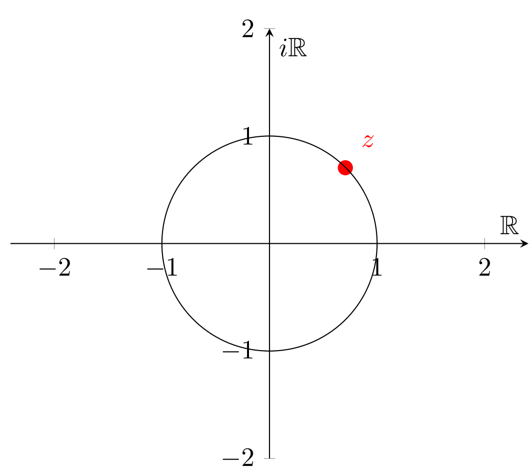
Tatsächlich lässt sich das letzte Beispiel auch einfacher mit folgendem Satz lösen

Satz. *Sind alle* a_k *im Polynom reell, also* $a_k \in \mathbb{R}$, *dann gilt: falls* z_0 *eine Nullstelle* $p(z_0) = 0$ *ist, so ist auch* $\bar{z_0}$ *eine Nullstelle* $p(\bar{z_0}) = 0$.

Im Beispiel vorhin hatten wir die zwei Koeffizienten $a_0 = 1, a_2 = 1$. Beide Koeffizienten sind reell. Daher konnten wir aus der ersten Nullstelle $z_1 = i$ direkt folgern, dass $\bar{z_1} = -i$ ebenfalls eine Nullstelle ist.

5 n-te Wurzel berechnen

Ein Problem, welches wir schon thematisiert haben, ist das Problem der Eindeutigkeit der Polarform. Diese ist nämlich keineswegs eindeutig (solange man nicht den Wertebereich von φ definiert). Schauen wir uns nochmals den Einheitskreis an und den Punkt $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.



Was geschieht nun, wenn wir zum Winkel 2π hinzuzählen? 2π ist bekanntlich eine ganze Kreisumdrehung, somit würden wir genau am gleichen Ort wieder ankommen. Es gilt also $z = e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)}$. Wir können aber nicht nur eine Kreisumdrehung machen, sondern beliebig viele (auch im Gegenuhrzeigersinn, sozusagen negative Kreisumdrehungen). Wir erhalten also

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2\pi\cdot k)} \text{ (wobei } k \in \mathbb{Z})$$

Die Polarform ist also alles andere als eindeutig. Bis jetzt war das noch egal. Bei den Wurzeln wird dies aber sehr wichtig sein. Denn wenn wir beispielsweise folgende Gleichung haben

$$z^3 = -1$$

dann muss dies wegen dem Fundamentalsatz 3 komplexe Lösungen haben. Wir gehen nach folgendem Rezept vor:

Rezept. (n-te Wurzel ziehen: $z^n = w$)

1. Schreibe w (also die rechte Seite) in Polarform.
2. Füge zum Winkel φ einen Summand $+2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hinzu:

$$w = re^{i(\varphi+2\pi k)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Nehme die $n-$te Wurzel davon: zuerst $n-$te Wurzel von r berechnen und dann die Potenz von e durch n teilen:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}$$

4. Setze nun für k die Werte 0 bis $n-1$ ein und erhalte insgesamt n Lösungen.

Merken. Die Lösungen von $z^n = w$ bilden ein regelmässiges n-Eck in der komplexen Zahlenebene.

Beispiel. *Bestimme alle Lösungen der Gleichung* $z^3 = i$.

Lösung. *Aus der Gleichung muss* $z = \sqrt[3]{i}$ *gelten. Es gibt also drei Lösungen dieser Gleichung. In Polarform gilt* $i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$. *Somit gilt* $z = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k)}$. *Wir finden für* $k \in \{0, 1, 2\}$ *dann folgende Lösungen*

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad (k=0)$$
$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad (k=1)$$
$$z_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}} \qquad (k=2)$$

Beispiel. *Bestimme alle Lösungen der Gleichung* $z^2 = i$.

Lösung. *Aus der Gleichung muss* $z = \sqrt{i}$ *gelten. Es gibt also zwei Lösungen dieser Gleichung. In Polarform gilt* $i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$. *Somit gilt* $z = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi k)}$. *Wir finden für* $k \in \{0,1\}$ *dann folgende Lösungen*

$$
\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\frac{\pi}{4}} && (k=0)\\
z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} && (k=1)
\end{aligned}
$$