

Aufgabe 1a)

Wir wenden zunächst Gauss an:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & | & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 & | & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & | & -5+s \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_3+2L_1 \hookrightarrow L_3 \\ L_5+L_1 \hookrightarrow L_5 \\ L_2-L_1 \hookrightarrow L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & | & -5+s \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_4+L_3 \hookrightarrow L_4 \\ L_5-L_3 \hookrightarrow L_5 \\ L_5+4L_2 \hookrightarrow L_5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & | & -6+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen nun, dass unter der Hauptdiagonalen nur noch Nullen stehen. Tatsächlich ist dies aber noch nicht die Zeilenstufenform! Wir vertauschen kurz die zweite mit der dritten Zeile und erhalten:

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & | & -6+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Die dritte und vierte Zeile bilden ein 2×2 System, das noch nicht vollständig in Zeilenstufenform ist. Das heisst auch, unsere gesamte Matrix ist nicht in Zeilenstufenform. Bis jetzt haben wir vereinfacht immer gesagt, dass wir unter der Hauptdiagonalen alles Nullen haben wollen. Es gibt aber Ausnahmen! Ist das sogenannte „Pivot“-Element (der Eintrag ganz links in einer Zeile, der nicht 0 ist) nicht auf der Hauptdiagonalen, so müssen wir gut aufpassen, wie wir die Zeilenstufenform erhalten. Denn jedes Pivot-Element muss immer weiter rechts stehen, als das Pivot-Element in der Zeile zuvor! So wird die Zeilenstufenform mathematisch korrekt definiert. Da hier das Pivotelement in der vierten Zeile in der gleichen Spalte steht wie das Pivot Element in der dritten Spalte, sind wir also noch nicht ganz fertig! Wir führen also das Gauss-Verfahren fort:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & | & -6+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4-5L_3 \hookrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

So sehen wir direkt (aus $\text{Rang}(A) \stackrel{?}{=} \text{Rang}(A|c)$), dass für $s \neq 1$ keine Lösungen existieren und für $s = 1$ unendlich viele existieren. Beachte hierbei, dass nur die erste Zeile die Unbekannten x_1 und x_2 enthält. Die restlichen zwei Nicht-Nullzeilen enthalten nur x_3 , x_4 und x_5 . Deswegen müssen wir $x_5 = t \in \mathbb{R}$ und eben $x_2 = r \in \mathbb{R}$ als freie Variablen wählen (wir könnten auch x_1 und x_3 beispielsweise – hauptsache wir wählen eine aus x_1 und x_2 und aus x_3 , x_4 und x_5). Aus der dritten Zeile erhalten wir

$$x_4 - 2t = -1 \implies x_4 = -1 + 2t$$

Dann aus der zweiten Zeile

$$2x_3 + 3(-1 + 2t) - 3t = -1 \implies x_3 = 1 - \frac{3}{2}t$$

und aus der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} 2x_1 - r + 3\left(1 - \frac{3}{2}t\right) - (-1 + 2t) + t &= -2 \\ \implies 2x_1 - r + 4 - \frac{11}{2}t &= -2 \\ \implies x_1 &= -3 + \frac{11}{4}t + \frac{1}{2}r \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L}_{s=1} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 + \frac{11}{4}t + \frac{1}{2}r \\ r \\ 1 - \frac{3}{2}t \\ -1 + 2t \\ t \end{pmatrix}, \quad t, r \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{L}_{s \neq 1} = \{\}$$