Aufgabe 4b)

Eine erste mögliche Lösung

Man erkennt, dass die Matrix die Rotationsmatrix ist. Diese rotiert einen Vektor um den Winkel φ in positive mathematische Richtung (also positives φ ist im Gegenuhrzeigersinn). Aus dem Koordinatensystem entnimmt man entweder die Drehung um $-\frac{3\pi}{4}$ oder die Drehung um $\frac{5\pi}{4}$. Man beachte, dass in der Aufgabenstellung explizit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ geschrieben steht, und somit nur der Winkel $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ (225° im Gegenuhrzeigersinn) infrage kommt.

Eine zweite mögliche Lösung

1. Wendet man die Rotationsmatrix B auf den Vektor v an, erhält man

$$B\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ a(\sin\varphi + \cos\varphi) \end{pmatrix}.$$

   Aus dem Koordinatensystem sehen wir, dass dieser Vektor gleich

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}\,a \end{pmatrix}$$

   sein soll (da er die gleiche Länge hat wie der Vektor v).

2. Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$a(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\varphi - \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

$$a(\sin\varphi + \cos\varphi) = -\sqrt{2}\,a \quad \Longrightarrow \quad \sin\varphi + \cos\varphi = -\sqrt{2}. \tag{2}$$

3. Aus Gleichung (1) folgt

$$\cos\varphi = \sin\varphi.$$

   Das bedeutet $\tan\varphi = 1$. Lösungen hierfür sind $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Um zu entscheiden, welches k passt, nutzen wir (2). Wir setzen $\cos\varphi = \sin\varphi$ in (2) ein:

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \sin\varphi + \sin\varphi = 2\sin\varphi = -\sqrt{2}.$$

   Also

$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Dies entspricht einem Winkel φ im 3. oder 4. Quadranten und somit ist die einzige passende Lösung

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$