PHYSIK I

KAPITEL 1

Mathematische Grundlagen

Taylorreihe: Näherung einer Funktion $f(x)$ um den Punkt x_0.

also: gegeben x_0, f gesucht: $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \quad \text{und} \quad \Delta x = x - x_0$$

Beispiel: $\sin(x) = \sin(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \cdot \sin^{(n)}(x_0)$ für $x_0 = 0 \Rightarrow$

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sin^{(n)}(0)$$

$\sin(0) = 0 \qquad \sin'(0) = 1 \qquad \sin''(0) = 0 \qquad \sin'''(0) = -1$

jeder zweite Term wird gestrichen!

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Partielle Ableitung: geg.: eine Funktion mit mehreren Variabeln (in Physik meist x, y, z)

$f(x,y,z) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ heisst, dass y und z konstant bleiben und nach x abgeleitet wird.

Beispiel: $f(x,y,z) = xyz \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = yz$

Integral: Sei f eine Funktion und F die Stammfkt.
Es gilt:

$$\int_a^x f(x')\,dx' = \int_a^x \frac{dF(x')}{dx'}\,dx' = \int_a^x dF(x')^{*}$$

$$= F(x) - F(a)$$

* totales Differential.

Vektoren: Wichtig in der Physik!

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$

(Fläche des Parallelogramms)

⚠ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

(Anwendung in Erhaltungssätze nützlich)

Kartesische Einheitsvektoren

e_x, e_y, e_z Skalarprodukt: $e_x e_y = e_y e_z = e_x e_z = 0$ da $\perp$

$e_x e_x = e_y e_y = e_z e_z = 1$ und $e_x \times e_y = e_z$

Häufig wird ein Vektor als Summe von Basisvektoren geschrieben:

$$\vec{r} = r_x \vec{e_x} + r_y \vec{e_y} + r_z \vec{e_z} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Man schreibt auch $\hat{x}$ statt $\vec{e_x}$.

Oft wird $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ verwendet.

Für die Ableitung von Vektoren verwenden wir sowohl beim Kreuzprodukt, als auch beim Skalarprodukt die Produktregel. Beachte Reihenfolge!

⚠ $$\frac{d}{dt} \vec{a} \times \vec{c} = \left(\frac{d}{dt} \vec{a}\right) \times \vec{c} + \vec{a} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{c}\right)$$

Reihenfolge!

wobei $$\frac{d}{dt} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Koordinaten können als Vektor entweder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezeichnet werden, oder in Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$

Polarkoordinaten für Zylinder und Kugel $\longrightarrow$ FB.

Wichtige Integrationsmethoden

Partielle Integration: $$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

Beispiel: $$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C$$

⚠ Konstante nicht vergessen! (in Physik meist v_0, a_0, s_0)

Die Strecke, die zurückgelegt wird bei einer Bahnkurve, lässt sich wie folgt schreiben:

$$\Delta s = \int_T |dr| = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

<u>Bsp</u>: für $t_0 = 0$ und Zylinder-Spirale gilt:

$$\Delta s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{R^2 \omega^2 + v_z^2}\, dt = \underline{\underline{\sqrt{R^2 \omega^2 + v_z^2}\, t}}$$

KAPITEL 2

Kinematik des Massenpunktes

Ein Massenpunkt ist ein idealisierter Körper, dessen Masse in einem Punkt konzentriert ist.
Eine Funktion $\vec{r}(t)$ stellt den Ortsvektor des Massenpunktes zum Zeitpunkt t dar. Man nennt sie Bahnkurve.
Die Bewegung des Massenpunktes heisst Translation.

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Im Allgemeinen gilt: $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{a}$

$$\underbrace{\vec{r} = \frac{d}{dt}}_{\int v\,dt} \quad \underbrace{\vec{v} = \vec{a}}_{\int a\,dt}$$

Am besten ist es, $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ als Vektoren zu schreiben. Man schreibt für $\frac{d}{dt}\vec{r}$ auch $\dot{r}$. Für die mittlere Geschw. gilt $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \overline{v}$.

$$\boxed{a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t)}$$

Falls a konstant ist, so gilt:

$$\ddot{r}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} a_x t + v_{0_x} \\ a_y t + v_{0_y} \\ a_z t + v_{0_z} \end{pmatrix} \qquad r(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x^2 t + v_{0_x} t + r_{0_x} \\ \frac{1}{2} a_y^2 t + v_{0_y} t + r_{0_y} \\ \frac{1}{2} a_z^2 t + v_{0_z} t + r_{0_z} \end{pmatrix}$$

Freier Fall

Anwendung

Für den freien Fall ist die Beschleunigung konstant.
Es gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Somit sieht der Ortsvektor in Abhängigkeit von t wie folgt aus:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \end{pmatrix}$$

Bei $v_0 = 0$ und $z_0 = h$ gilt also

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

Die Zeit, bei der er am Boden ankommt gilt:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + h = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Die Endgeschwindigkeit $v_z(t) = -gt = -\sqrt{2h \cdot g}$

Der schräge Wurf

Anwendung

Wieder haben wir den Fall des freien Falls.
Diesmal haben wir aber auch eine Geschwindigkeit in x Richtung. $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$

⚠ Die Geschwindigkeit geht in drei Richtungen!

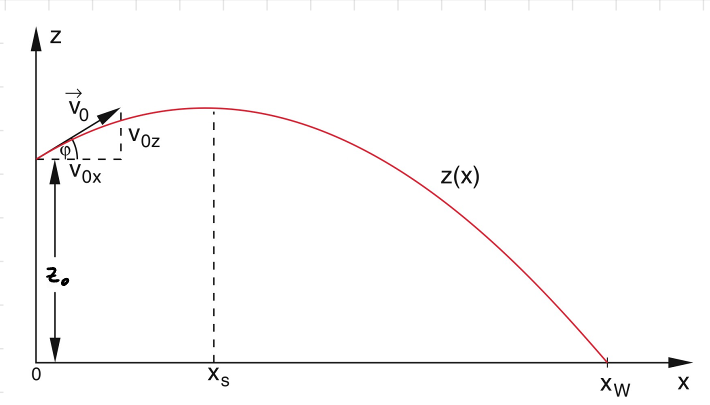
Wir betrachten den Fall $\vec{r}_y(t) = 0$.

Es gilt also

$$x(t) = v_{0x} t$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t + z_0$$

Wir wollen nun die Wurfparabel finden.
Dazu setzen wir z in Abhängigkeit von x und eliminieren somit t.

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + z_0$$



Kreisbewegungen

Speziell an der Kreisbewegung ist, dass sich die Geschwindigkeit trotz Beschleunigung nicht ändert!
Dies liegt daran, dass die Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit steht.
Die Winkelgeschwindigkeit ω ist die Ableitung des "zurückgelegten" Winkels φ. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $[\omega] = \frac{rad}{s}$
Die Tangentialgeschwindigkeit ist dann $v = R \cdot \omega$
Die Beschleunigung zum Mittelpunkt ist $\vec{a} = -\omega^2 R \cdot \hat{r}$
Für den Winkel φ gilt: $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$
(analog zu $x(t)$)
Weitere Formeln zu Periode und Frequenz → FB

Die Winkelgeschwindigkeit

ω lässt sich auch als Vektorprodukt schreiben.
Es gilt: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Einschub: Vektoridentität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$ $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf $\vec{r} \times \vec{v}$

⚠ $\vec{r}$ ist der Vektor senkrecht zu ω und nach aussen!

Winkelbeschleunigung

α ist die Winkelbeschleunigung. Analog zu den "normalen" Bewegungen gilt:

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Der Ortsvektor ist gegeben durch

$$\vec{r} = |r| \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$v(t) = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega(t)$$

Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ lässt sich als Summe der Komponenten $\vec{a}_\perp(t) + \vec{a}_\parallel(t)$.

$$|a_\parallel| = r \cdot \ddot{\varphi} \qquad \text{(ändert Bahngeschwindigkeit)}$$
$$|a_\perp| = r \cdot \dot{\varphi}^2 \qquad \text{(ändert Richtung)}$$

$$|a| = r \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}.$$

$a \neq 0$ falls sich entweder der Betrag oder die Richtung von $\vec{v}$ ändert, oder beides.

$$\vec{a}(t) = \dot{v} \cdot \vec{e}_\parallel(t) + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_\perp(t)$$

KAPITEL 3

Dynamik des Massenpunktes

In der Kinematik geht es darum, wie sich ein Teilchen bewegt. In der Dynamik hingegen, weshalb sich ein Teilchen bewegt.

Die Masse

Gewicht ≠ Masse. Das Gewicht ist eine Kraft (bzw ein Vektor) während die Masse ein Skalar ist. Das Gewicht eines Astronauten im Weltall ist $= 0^*$, die Masse hingegen bleibt gleich.

Rückstossversuch ergibt $\frac{m_A}{m_B} = \frac{v_B}{v_A}$

Es wird unterschieden zwischen:

<u>träge Masse</u>: mit Rückstossversuch oder in $F = \underline{\underline{m}} \cdot a$.

<u>schwere Masse</u>: die Grösse, die wir mit einer Waage messen. <u>Beispiel</u>: $F_g = \underline{\underline{m}} \cdot g$

* Gravitation wirkt trotzdem auf ihn!

Impuls

Der Impuls p ist gegeben durch

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad \left[kg \cdot \frac{m}{s}\right]$$

Beim Rückstossversuch gilt $m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = 0$
da allgemein $p_{tot} = p_A + p_B + \ldots$ gilt und der Impuls erhalten bleibt (bei Rückstossversuch anfangs 0)

$$p_{tot}(\text{vorher}) = p_{tot}(\text{nachher})$$

Die Impulserhaltung gilt für alle Dimensionen.
Es gibt keine Ausnahmen dieser Erhaltung

⚠ Die Impulserhaltung gilt immer

Die Impulserhaltung ist ein Axiom und kann <u>nicht</u> bewiesen werden!

Ein elastischer Stoss bezeichnet einen Vorgang, bei dem sich innere Grössen, wie die Masse, <u>nicht</u> ändern.

Das 2. Newtonsche Gesetz

Die resultierende Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist gleich des zeitlichen Änderung (Ableitung) des Impulses.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Die resultierende Kraft kann aus der Vektorsumme der einzelnen Kräfte berechnet werden.

$$\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i$$

Kraftstoss

Kraftstoss $\int_{t_a}^{t_e} \vec{F}\, dt \quad = \int_{t_a}^{t_e} \dot{p}\, dt = p_e - p_a$

häufig reicht es, $m \cdot (v_e - v_a)$ sich zu merken.

Es gibt nur vier heute bekannte Kräfte:

Gravitation : sehr kleine relative Stärke, ∞ Reichweite
Elektromagn. : sehr grosse relative Stärke, ∞ Reichweite
Schwach : kleine relative Stärke, sehr kleine Reichweite
Stark : sehr grosse relative Stärke, kleine Reichweite

Wir schreiben häufig F in abhängigkeit von der Beschleunigung a. Es gilt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}(t)$$

⚠ Dies gilt nur wenn die Masse konstant ist!

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0} \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}(t)$$

Dieses Gesetz bezeichnen wir als "Aktionsprinzip"

$$[F] = 1N = 1\,kg \frac{m}{s^2}$$

Das erste Newton'sche Gesetz

Trägheit: Ein isolierter Körper ($\vec{F}_{res} = 0_v$) bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstantem v.
Dies hängt vom Bezugssystem ab.
Das Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem das 1. Newton'sche Axiom gilt.

Das dritte Newton'sche Gesetz

<u>Aktion = Reaktion</u>: Zu jedes Kraft gehört eine gleich grosse Kraft, die denselben Betrag besitzt, aber in die entgegengesetzte Richtung verläuft.

Dies folgt aus

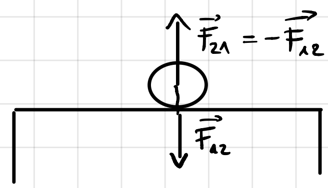
$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = 0$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

<u>Beispiel</u>: Kugel auf Tisch:



Eine Kugel wirkt auf den Tisch eine Kraft $\vec{F}_{12}$ aus. Diese Kraft ist gleich gross wie die Kraft die der Tisch auf die Kugel auswirkt. Wäre dies nicht der Fall, würde die Kugel durch den Tisch hindurchfliegen.

Newtons Gesetze

N1

Trägheit: Ein isolierter Körper ($\vec{F}_{res} = 0_v$) bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstantem v.

N2

Die resultierende Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist gleich des zeitlichen Änderung (Ableitung) des Impulses.

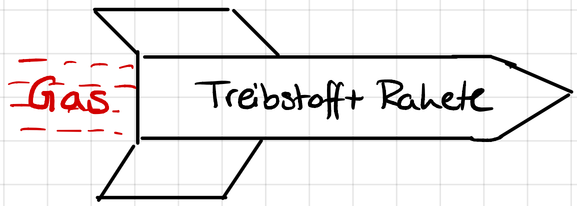
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

N3

Aktion = Reaktion: Zu jedes Kraft gehört eine gleich grosse Kraft, die denselben Betrag besitzt, aber in die entgegengesetzte Richtung verläuft.

Raketenantrieb

Der Raketenantrieb lässt sich nur mit der Impulserhaltung begründen.



Sei u = Geschw. des ausgestossenen Gases relativ zur Rakete

v = Geschw. der Rakete (Geschw. zur Zeit t)

$M(t)$ = Masse zum Zeitpunkt t.

Der Impuls der Rakete ist also:

$$p = M(t) \cdot v(t)$$

Wir betrachten nun das kleine Zeitintervall dt.
Nach dt hat die Rakete die Masse dm verloren und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v + dv$ weiter.
Das Gas hat die Geschwindigkeit $-u + \underbrace{v}_{v+dv}$ zum externen Beobachter

Gesamtimpuls:

$$p(t+dt) = (M - dm)(v + dv) + dm(v + dv - u)$$

$$\Rightarrow p(t+dt) = Mv - \cancel{dmv} + Mdv - \cancel{dmdv} + \cancel{dmv} + \cancel{dmdv} - dmu$$

$$= Mv + Mdv - udm$$

$$p(t+dt) = p(t) = \cancel{Mv} + M dv - u dm = \cancel{Mv}$$

$$\Rightarrow \quad M dv = u dm$$

$$\Rightarrow \quad M \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad F = u \cdot \frac{dm}{dt}$$

die Rakete wird beschleunigt !

Mit Integration und $dm = -dM$ erhalten wir:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{v(t')}{dt'} dt' = -u \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{dM}{M(t')} \frac{dt'}{dt'}$$ und somit

$$v(t) - v_0 = -u \cdot \left[\ln(M_0 - m) - \ln(M_0)\right]$$

wobei M_0 die Anfangsmasse bei $t = t_0$ und m die Gesamtmasse des ausgestossenen Gasses ist

Falls:

$$\frac{M_0}{M_0 - m} > e$$

dann gilt $\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - m}\right) > 1$

$$\ln(M_0) - \ln(M_0 - m) > 1$$

$$\frac{v}{u} > 1$$

$$v > u$$

In diesem Fall bewegt sich das ausgestossene Gas in die gleiche Richtung wie die Rakete da $-u + v > 0$.

Rezept für Newton

1. Körper auswählen, dessen Bewegung untersucht werden sollte.

2. Alle Kräfte aufschreiben, die auf diesen Körper wirken.

3. Ein geeignetes Koordinatensystem wählen.

4. Newton'sche Gesetze für alle Komponenten aufschreiben

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i F_i$$

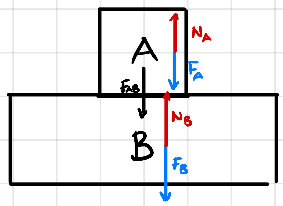
5. Diff - Gleichung lösen

6. Konstanten ausfindig machen. Meist sind sie r_0, v_0

7. Lösung auswerten $\Rightarrow \vec{v}(t), \vec{r}(t) \ldots$

Anwendung: Kontaktkräfte

Beispiel



Block A: $F_A + N_A = 0$

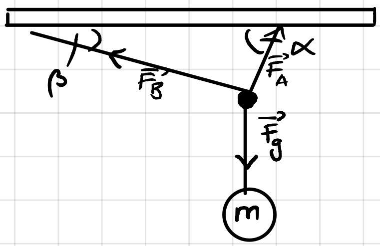
Block B: $F_B + N_B + F_{AB} = 0$

Wegen N3 gilt $F_{AB} = -N_A$

$$F_A + N_A = F_B + N_B - N_A$$

$$\boxed{F_A + F_B + N_B = 0}$$

Beispiel: Hängendes Gewicht in Ruhe



$\alpha > \beta$

$$\vec{F_A} + \vec{F_B} + \vec{F_g} = 0$$

(1) $F_B \cdot \sin\beta + F_A \cdot \sin\alpha = -F_g$

(2) $F_B \cdot \cos\beta - F_A \cdot \cos\alpha = 0$

(2) $\Rightarrow F_B = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot F_A$ da $\alpha > \beta \Rightarrow \cos\alpha < \cos\beta$

$\Rightarrow F_B < F_A$ $\square$

Federkraft (Hook'sches Gesetz)

Die Kraft, die wir zum Dehnen einer Feder aufwenden müssen ist gegeben durch

$$F = k \cdot (x - x_0) \qquad \text{(eindimensional!)}$$

bzw $F = k \cdot \Delta x$ Δx: Auslenkung

Für $x_0 = 0$ (Koordinatensystem am besten so setzen):

$$F = k \cdot x$$

k ist die Federkonstante. (siehe Schwingungen)

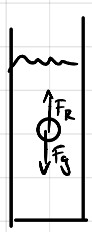
Reibung

Zwei Arten: $\underbrace{\text{Haftreibung}}_{\text{stehend}}$ und $\underbrace{\text{Gleitreibung}}_{\text{Bremsen}}$.

$$F_R = \mu \cdot F_N \qquad \left(\mu_{\text{Haftreibung}} \overset{\text{meist}}{>} \mu_{\text{Gleitreibung}}\right)$$

Es gibt noch eine dritte Art, nämlich die Rollreibung (später →)

Beispiel: Kugel in Flüssigkeit



$$F_R = -6\pi\eta r \cdot \vec{v}$$

η = Viskosität
r = Radius der Kugel

Allgemeiner Strömungwiderstand: $\vec{F_R} = \varkappa \cdot \vec{v}$

Kraftfelder

In der Physik definiert man das Kraftfeld in Abhängigheit von Ort (und Zeit für nicht-statische Felder) wie folgt:

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \gamma \cdot \vec{f}(\vec{r},t)$$

- γ ist die Kopplungskonstante und bezieht sich auf ein Teilchen (Masse, Ladung ...)
- $\vec{f}(\vec{r},t)$ ist das "spezifische Feld"

Beispiel 1: Coulomb-Kraft (statisches Feld)

$$\vec{F}_E(\vec{r}) = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$

$\gamma = q$ (Ladung des einzelnen Teilchens)

Das Zentralkraftfeld, $E(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$

Beispiel 2: Das Gravitationsfeld

Das Gravitationsfeld ist ebenfalls ein Zentralkraftfeld.

Es gilt:
$$\vec{F}_m = \underset{=\gamma}{\underset{\uparrow}{m}} \cdot \underbrace{-G_N \cdot \frac{M}{r^2}\,\hat{r}}_{=\vec{g}(\vec{r})}$$

$$m \cdot \vec{a}_m = m \cdot -G_N \cdot \frac{M}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\vec{a} = -G_N \cdot \frac{M}{r^2}\,\hat{r}$$

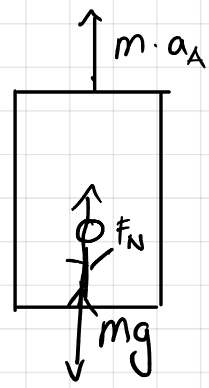
Nach N3 gilt $\vec{F}_m = -\vec{F}_M$ und somit

$$\left|\frac{a_M}{a_m}\right| = \frac{m}{M} \ll 1$$ und daher

ist N3 hier vernachlässigbar.

Anwendung: Newton + Schwerelosigkeit

Aufzug:



1) Aufzug beschleunigt nach oben

$$F_N = mg + m \cdot a_A$$

$$= m(g + a_A) > mg$$ fühlt sich "schwerer"

2) Aufzug bremst

$$F_N = m(g + a_A) < mg \quad \text{da} \quad a_A < 0$$

fühlt sich "leichter".

Astronaut im Raumschiff

Schwerelos bedeutet, dass keine Normalkraft entgegenwirkt, obwohl die Gravitation die einzige Beschleunigung ist. $F_N = 0$ aber die Zentripetalbeschleunigung $a_{ZP} = g$ ist konstant.

Beschleunigte Systeme – „Scheinkräfte"

Zentrifugalkraft : $\vec{F}_{ZF} = -\vec{F}_{ZP} = -m\omega \times (\omega \times r')$ (nach aussen)

Die Zentrifugalkraft existiert <u>nur</u> dann, wenn wir im rotierenden Bezugssystem stehen zur Masse m. Sie ist die "Gegenkraft" zur Zentripetalkraft.

Corioliskraft

Beispiel: Du stehst im Mittelpunkt eines Kreises und wirfst einen Ball nach aussen. Für dich wird der Ball in die entgegengesetzte Richtung abgelenkt, während ein externer Beobachter den Ball gerade weiterfliegen sieht.

$$\vec{F}_C = -2m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

⚠ Die Geschwindigkeit $\vec{v}'$ muss zuerst in seine Komponenten (senkrecht / parallel zu ω) aufgeteilt werden.

Die grösste Coriolisbeschleunigung tritt am Äquator auf.
Für Aufgaben mit "Senkrechter Wurf + Coriolis" denke an Beispiel!
"Freier Fall + Coriolis" ist genau entgegengesetzte Richtung von "Senkrechter Wurf"

KAPITEL 4

Arbeit und Energie

Arbeit

Die Arbeit, die die Kraft $\vec{F}$ während einer geradlinigen Strecke auf einen Angriffspunkt leistet, ist definiert als Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Allgemeiner gilt für einen gekrümmten Weg von $\vec{r}_1$ bis $\vec{r}_2$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Einheit $Nm = J = Ws$

Beispiel Kreisförmige Bewegungen fordern keine Arbeit da $\vec{F}_{ZP} = -m\frac{v^2}{r}\hat{r} \perp d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$ gilt.

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Leistung

Die Leistung ist die erste Ableitung der Arbeit

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Die Einheit für P ist 1W (Watt)

$$1\ \frac{Nm}{s} = 1\ \frac{m^2\,kg}{s^3} = 1\ \frac{J}{s} = 1\,W$$

Energie

kinetische Energie

Für konstante Massen gilt:

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \int_{\vec{v_1}}^{\vec{v_2}} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2} m \vec{v_2}^2 - \frac{1}{2} m \vec{v_1}^2$$

Die kinetische Geschwindigkeit ist:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

und somit $W = T(\vec{r_2}) - T(\vec{r_1})$

Konservative Kräfte

Sei $\vec{F}$ ein Kraftfeld und U eine Funktion.
Für eine konservative Kraft gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U = -\operatorname{grad} U$$

⚠ Kraftfelder die abhängig sind von der Zeit oder der Geschwindigkeit sind meist nicht-konservativ

Potential

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r} = \underbrace{u(r_1) - u(r_2)}_{\text{Potentielle Energie}}$$

⚠ Dies ist die, von dem Kraftfeld verrichtete Arbeit !

$u(\vec{r})$ ist das Potential

Die Potentielle Energie des Punktes $\vec{r}_2$ bezüglich $\vec{r}_1$ ist dann

$$U_{2-1} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Die Arbeit hängt lediglich von den Endpunkten ab !

Beispiel Gravitation an Erdoberfläche

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix} = -mg\,dz$$

$$U_{2-1} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg \cdot (z_2 - z_1)$$

Häufig wird das Bezugspotential gleich 0 gesetzt, wenn r gegen unendlich strebt.

Potentielle Energie der Feder

Hook'sche Gesetz $\Rightarrow$ $F_R = -k \cdot (x - x_0)$

$$-\int_{x_0}^{x} \vec{F} \cdot dx = k \cdot \int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Zentralfeld: Gravitation

$$U(\vec{r}) = U_r - U_0 = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\vec{F} = -\nabla U = G_N \cdot m_1 m_2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{G_N \cdot m_1 m_2}{r^2}$$ mit $U_0 = 0$ für $r \to \infty$

$$dE_{pot} = \nabla E_{pot} \cdot d\vec{r}$$

Verschiebung

Energieerhaltung

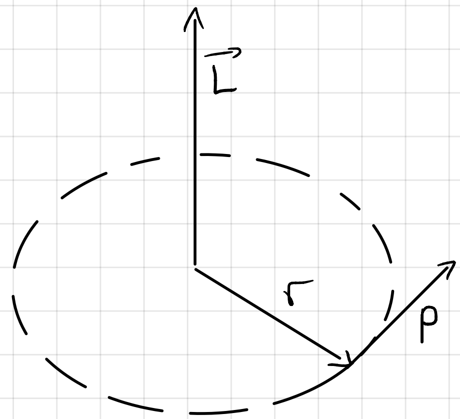
Die Summe der potentiellen und kinetischen Energie bleibt konstant.

$$E = T + U + Q + \ldots = \text{konst.}$$

Die Energieerhaltung gilt für elastische Stösse und inelastische Stösse. Bei inelastischen hin-gegen, kann es vorkommen, dass die Energie durch Wärme / Verkrümmung etc "verloren" geht.

KAPITEL 5

Drehbewegungen



Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$= mr^2 \vec{\omega}$$

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$

Drallsatz: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$

In einem abgeschlossenen System ist der Drehimpuls erhalten.

KAPITEL 6

Vielteilchensysteme

Schwerpunkt

Ortsvektor: $\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

Bewegungsgleichung: $m_{tot} \cdot \ddot{\vec{r}}_S = \vec{F}_{ext}$

⚠ Der Schwerpunkt einer Masse muss nicht unbedingt in der Masse sein (vgl. Donut)

Aus $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0$ folgt $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0$ für alle Drehmomente im Schwerpunktsystem.

Für den Impuls im Schwerpunktsystem gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = 0$$

Erhaltungsgrössen

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt bewegt sich mit konstantem Impuls, wenn die Summe aller äusseren Kräften auf das System verschwindet.

$$\dot{\vec{p}}_s = \sum_{i=1}^{N} F_{ext,i}$$

Impulssatz

Die Summe der Impulse bleibt konstant.

$$\sum_{i=1}^{N_1} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N_2} \vec{p}_i\,'$$

(gilt auch, wenn sich die Anzahl Teilchen ändert)

Drehimpulssatz

Der Drehimpuls bleibt konstant, wenn die externen Drehmomente verschwinden. (siehe Drallsatz)

Die Summe aller Drehmomente, welche von inneren Kräften eines Inertialsystems hervorgerufen werden, ist gleich 0.

2-Teilchen-System

Die "reduzierte Masse" ist definiert durch

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Es gilt für die Impulse im Schwerpunktsystem:

$$\vec{p}_1 = \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$
$$\vec{p}_2 = -\mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Beachte!: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \mu \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) - \mu (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$
ist die Definition des Schwerpunktsystems.

Bewegungsgleichung

$$\mu \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_{12} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$
$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_S = F_{ext}$$

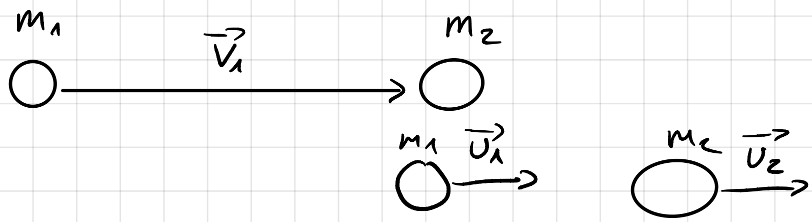
Algorithmus

1) aus F_{ext}, v_S bestimmen
2) r_{12}, v_{12}, $\mu \cdot \dot{\vec{v}}_{12} = F_{12}$ bestimmen
3) Eigendrehimpuls: $\vec{L} = r_{12} \times \mu \cdot v_{12}$
   kin. Energie des Systems: $\frac{1}{2} \mu \cdot v_{12}^2$

Teilchenstösse

elastischer Stoss

Impuls und kinetische Energie werden ausgetauscht, ohne dass sich die innere Energie ändert (bzw. keine Verformungen, keine Temperaturänderung etc)



$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \qquad u_2 = 2 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

i. A.

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

u_2 = analog mit $\underset{1 \leftrightarrow 2}{\text{vertauschten}}$ Indizes.

Funktioniert leider nicht für 3-Teilchen-Systeme.

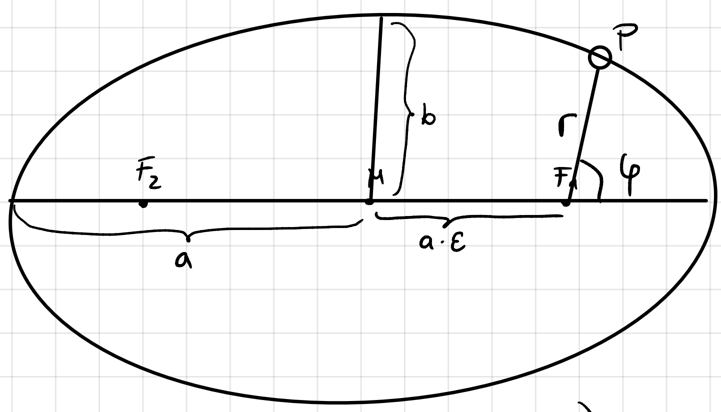
KAPITEL 7

Gravitationstheorie

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G_N \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$$ ← Richtung

Kepler'sche Gesetze

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.



$$r(\varphi) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

2. Der Fahrstrahl von Sonne zum Planeten überstreicht in selber Zeit die selbe Fläche

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_{tot}}{2m} = \text{konst}$$

L_{tot} ← totaler Drehimpuls des Planeten

m ← Masse von Planeten

3. Es gilt: $\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G_n M} = \text{konst.}}$

Wobei T: Umlaufzeit des Planeten

a: grosse Halbachse

Alle Formeln in der Formelsammlung!

Gravitationspotential

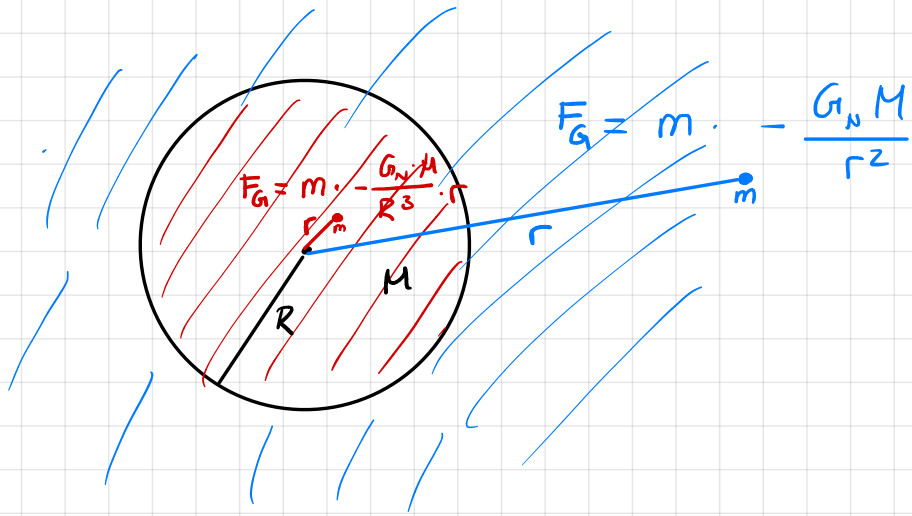
Die Energie eines Körpers im Gravitationsfeld beträgt:

$$E = \frac{1}{2} m \Big(\underbrace{\dot{r}^2 + \frac{L}{m^2 r^2}}_{v^2}\Big) - G_N \frac{mM}{r} \stackrel{!}{=} \text{konst.}$$

Homogene Kugelschale

Das Gravitationsfeld im Innern einer homogen mit Masse belegten Kugelschale ist identisch null! Ausserhalb ist sie gleich, wie wenn die Masse der Mittelpunkt der Kugel wäre.

Kugel mit homogener Massenverteilung



KAPITEL 8

Dynamik des starren Körpers

Für den Schwerpunkt gilt:

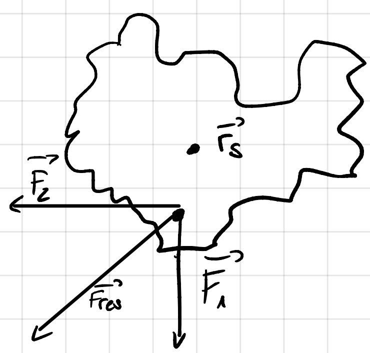
$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \rho \cdot dV$$

Wichtig: Zylinder: $dV = r \cdot \overset{\int_0^r}{dr} \cdot \overset{\int_0^{2\pi}}{d\varphi} \cdot \overset{\int_0^h}{dz}$

Kugel: $dV = r^2 \cdot \sin\theta \cdot \underset{\int_0^r}{dr} \cdot \underset{\int_0^{\pi}}{d\theta} \cdot \underset{\int_0^{2\pi}}{d\varphi}$

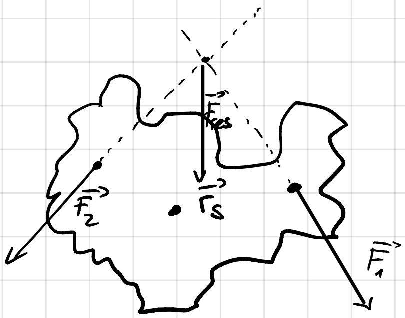
Addition von Kräften

1.) 2 Kräfte greifen an einem Punkt an



$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

2.) 2 Kräfte, verschiedene Stellen

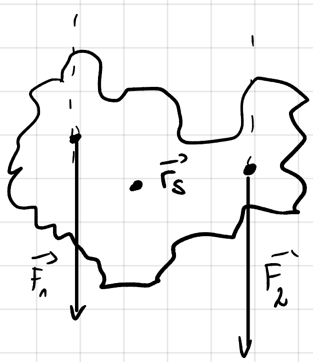


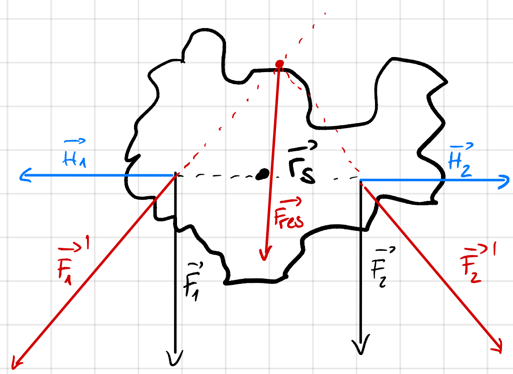
i) Wirkungslinien einzeichnen.

ii) Deren Schnittpunkt ist der Angriffspunkt.

iii) Wiederhole ersten Fall

3. 2 Kräfte parallel





i) Verschiebe $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ auf gleiche Höhe wie $\vec{r}_s$.

ii) Konstruiere zwei Hilfskräfte die sich aufheben.

iii) Es ergeben sich zwei resultierende Kräfte

iv) Wiederhole zweiten Fall mit diesen Kräften

⚠ Eine Kraft erzeugt auf jedem Punkt der Wirkungslinie dasselbe Drehmoment bezüglich eines Drehpunktes.

$$\vec{M}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$$

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Statisches Gleichgewicht

Im statischen Gleichgewicht gilt immer:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \qquad \text{(Translation)}$$

und $$\vec{M}_{res} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0 \qquad \text{(Drehbewegung)}$$

⚠ • $M = r_{\perp} \cdot F$

bezüglich Wirkungslinie

- Vorstellen, in welche Richtung sich der Körper dreht durch die Kraft.

- $\vec{F}_i$ jeweils in $\vec{F}_{i,x}$ und $\vec{F}_{i,y}$ zersetzen.

Denn: $$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,x} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,y} = 0$$

Trägheitsmoment

Volumenelement

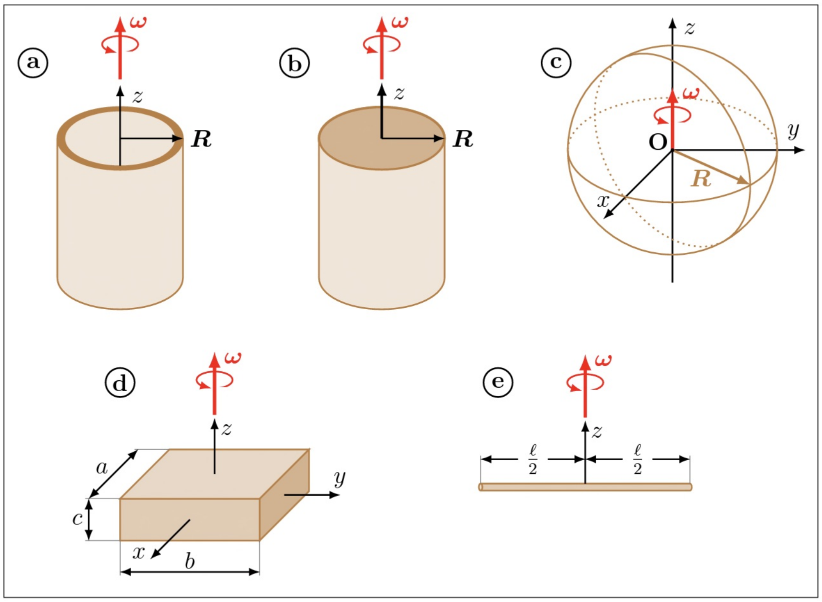
$$J = \int_M r_\perp^2 \, dm = \underbrace{\int_V r_\perp^2 \rho \, dV}_{\text{einfacher}}$$

Drehimpuls: $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ $\quad \left(M = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)$

Rotationsenergie: $T = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

J ist ein Skalar!

Wie berechnen?



Notizen

(a) $$J = \int_M r_\perp^2 \, dm$$

Jedes Masseteilchen hat gleichen Radius zur Achse (R)

$$J = \int_M R^2 \, dm = R^2 \int_M dm = \boxed{MR^2}$$

(b) $$J = \int_V r_\perp^2 \varrho \, dV$$

$$dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

$$J = \iiint_V r_\perp^2 \cdot \varrho \cdot r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

$$= \varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^h dz \cdot \int_0^R r_\perp^3 \, dr_\perp$$

$$= \varrho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\varrho \cdot h \pi R^2}_{M} \cdot R^2$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$

(c) $dV = r^2 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$

$$J = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{R} r_\perp^4 \, dr_\perp$$

$$= \rho \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot R^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \boxed{\frac{2}{5} M R^2}$$

(d) $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$J = \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dV$$

$$= \rho \cdot \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{12} \cdot abc \cdot (a^2 + b^2) \cdot \rho$$

$$= \boxed{\frac{1}{12} M \cdot (a^2 + b^2)}$$

Steinersche Satz

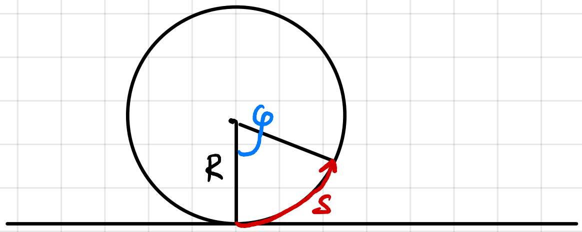
Sei J_z der Trägheitsmoment bezüglich der Achse z. Dann ist der Trägheitsmoment bezüglich der Achse z' gleich:

$$J_{z'} = J_z + Ma^2$$

wobei a: $r_\perp$ von z zu z' und

M: Masse des ganzen Körpers.

Rollende Körper



$s = R\varphi$, $v = R\omega$, $a = R\alpha$

$F_R = \mu_R \cdot F_N$

Eigendrehmoment $= M = J \cdot \ddot{\varphi}$

" - drehimpuls $= L = J \cdot \dot{\varphi}$

KAPITEL 9

Schwingungen

harmonischer Oszillator

$$F_{rück} = -k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \qquad (1)$$

ω_0 : Eigenfrequenz

mit Dämpfungstherm:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \qquad (2)$$

Für (1) erhalten wir (siehe ZS zu DGL)

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

da aber $x(t)$ reell ist, gilt

$$x(t) - \bar{x}(t) = 0$$

und somit

$$x(t) = |C| \cdot \left\{ e^{i(\omega_0 t + \delta')} + e^{-i(\omega_0 t + \delta')} \right\}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \delta')$$

$$= A \cdot \sin(\omega_0 t + \delta) \qquad \left(\delta = \delta' + \frac{\pi}{2} \right)$$

Grössen

$$\underset{\text{Periode}}{T} = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad \underset{\text{Frequenz}}{f} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

Bei max. Auslenkung: $x = \pm A \quad v = 0 \quad \underbrace{a = \mp A\omega^2}_{\text{maximal bzw minimal}}$

Bei Nulldurchgang: $x = 0 \quad \underbrace{v = \pm A\omega}_{\text{max bzw min}} \quad a = 0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Energiebilanz

$$E_{tot} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{E_{kin}} + \underbrace{\frac{1}{2} m\omega^2 x^2}_{E_{pot}} = const$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Mittelwert von E_{kin} ist gleich wie bei E_{pot}

$$\langle E_{kin} \rangle = \langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{2} E_{tot}$$

Gedämpfte Schwingung

Sei $F_{Rück} = -kx$ die Rückstellkraft und $F_R = -\varkappa \dot{x}$ die Reibung. Es gilt

$$m\ddot{x} = -kx - \varkappa \dot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\varkappa}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

und somit: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \varrho = \frac{\varkappa}{2m}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\varrho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3 Fälle:

1. Fall: Schwache Dämpfung $(\varrho < \omega_0)$

$$x(t) = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)\, e^{-\varrho t}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2}$$ ⚠ $\omega_0 \neq \omega$ *

$$x(t) = A e^{-\varrho t} \sin(\omega t + \delta)$$

2. Fall kritische Dämpfung $(\varrho = \omega_0)$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\varrho t}$$

3. Fall starke (überkritische) Dämpfung $(\varrho > \omega_0)$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit $\lambda_{1,2} = -\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2} < 0$

* bei harm. Oszillator gilt: $\omega = \omega_0$ da $\varrho = 0$ ist.

Energiebilanz von gedämpften Schwingungen

$$\text{Verlustleistung} = P_R = \frac{dE_{tot}}{dt} = -2\rho m \dot{x}^2$$

Erzwungene Schwingungen (Resonanz)

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

$$x(t) = C_1 e^{-\rho t}\cos(\omega t + \delta) + C_2 \cos(\Omega t + \phi)$$

- alle Formeln in Formelsammlung
- ziemlich unwichtig!

Überlagerung von Schwingungen

gleiche Frequenz

$$x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \delta_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \delta_2)$$

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

A und δ können aus Formelsammlung entnommen werden!

unterschiedliche Frequenz

→ Formelsammlung (Herleitung unwichtig)

Fourierreihen

Def: Überlagerung von vielen Schwingungen.

Formeln in FS. (evtl. anschauen)

gekoppelte Oszillatoren

Zwei Oszillatoren

Seien zwei Oszillatoren mit gleicher Eigenfrequenz durch eine Feder verbunden

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

Wir substituieren $z_1 := x_1 - x_2$, $z_2 := x_1 + x_2$

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 + 2\frac{k}{m} z_1 = 0$$
$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$$

2 Fälle:

1. gleichläufig: $z_1(t) = 0 \,,\; z_2(t) = 2x_1(t)$

da $x_1(t) = x_2(t) \;\; \forall t$

2. gegenläufig: $z_1(t) = 2x_1(t) \,,\; z_2(t) = 0$

da $x_1(t) = -x_2(t) \;\; \forall t$

KAPITEL 10

Wärmelehre und Thermodynamik

Druck: $p = \frac{F}{A}$ $[p] = 1\,Pa$

Gay-Lussac: $V \propto T$ (falls p konst)

$p \propto T$ (falls V konst)

$V = A \cdot h = C_1 \cdot T$ $\Rightarrow$ Thermometer

Wärmekapazität

$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$, spezifische$_m$: $c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta T}$

molare$_\mu$: $c = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta T}$

ν = Stoffmenge in mol.

$$Q = \int \delta Q = \int_{T_a}^{T_e} C(T)\,dT = C\Delta T.$$

Dulong-Petit'sche Annäherung: $c_\mu \approx 25 \frac{J}{mol\,K}$ (für Festkörper)

0-ter Hauptsatz

Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht, so haben sie dieselbe Temperatur.

1-ter Hauptsatz

$$dU = \delta W^{\swarrow} + \delta Q^{\swarrow}$$

Def Ideales Gas

Ansammlung von neutralen Atomen, deren Ausdehnung und Wechselwirkung vernachlässigt werden können.

Zustandsgleichung

$$p \cdot V = \overset{\text{Teilchenanzahl}}{N} \underset{\text{Boltzmann-Konstante}}{k} T$$

$$p \cdot V = \underset{\text{Menge in mol}}{\nu} \overset{\text{Gaskonstante}}{R} T$$

Äquipartitionsgesetz

$$U = \nu \cdot \frac{f}{2} RT$$

Molare Wärmekapazität

bei konstantem Volumen

$$\Delta Q_V = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T \quad \text{mit} \quad C_{M,V} = \frac{f}{2} R$$

(Freiheitsgrad in Tabelle)

bei konstantem Druck

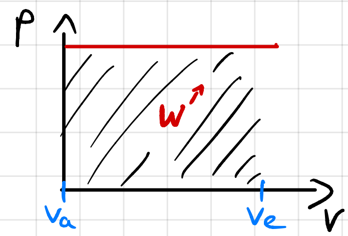
$$\Delta Q_p = \nu \cdot C_p \cdot \Delta T \quad \text{mit} \quad C_{M,p} = \frac{f+2}{2} R$$

und somit $C_{M,p} = C_{M,V} + R$

Zustandsänderungen

isobare Zustandsänderung (p const)

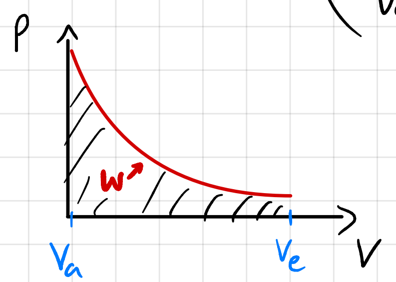
$$W^{\swarrow} = -p \int_{V_a}^{V_e} dV = -p\,(V_e - V_a)$$



isotherme Zustandsänderung (T const)

$dU = 0 \qquad pV = \text{konst.} \qquad U(T) = \text{konst.}$

$$Q^{\swarrow} = \nu R T \ln\left(\frac{V_e}{V_a}\right) = W^{\nearrow}$$



isochore Zustandsänderung (V const)

$$\Delta Q = \Delta U = \nu C_{M,V}\,(T_e - T_a)$$

$$\Delta W = 0.$$

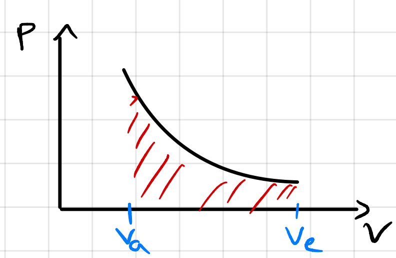
adiabatische Zustandsänderung (Q const)

$$T V^{\kappa - 1} = \text{konst}$$

$$p V^{\kappa} = \text{konst}$$

$$T^{\kappa} p^{1-\kappa} = \text{konst}$$

$$p_a V_a^{\kappa} = p_e V_e^{\kappa}$$



$\kappa = \frac{f+2}{f}$!

Carnot - Prozess

$1 \rightarrow 2$ isotherme Expansion $V_1 \rightarrow V_2$

1 $$\Delta W^{\nearrow} = \Delta Q^{\swarrow} = \nu \cdot R \cdot T_w \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$2 \rightarrow 3$ adiabatische Expansion $V_2 \rightarrow V_3$

2 $$\Delta Q^{\nearrow\swarrow} = 0$$
$$\Delta W^{\nearrow} = \nu \cdot C_V \cdot (T_w - T_k)$$

$3 \rightarrow 4$ isotherme Kompression $V_3 \rightarrow V_4$

3 $$\Delta W^{\nearrow} = \Delta Q^{\swarrow} = \nu \cdot R \cdot T_k \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$$

$4 \rightarrow 1$ adiabatische Kompression $V_4 \rightarrow V_1$

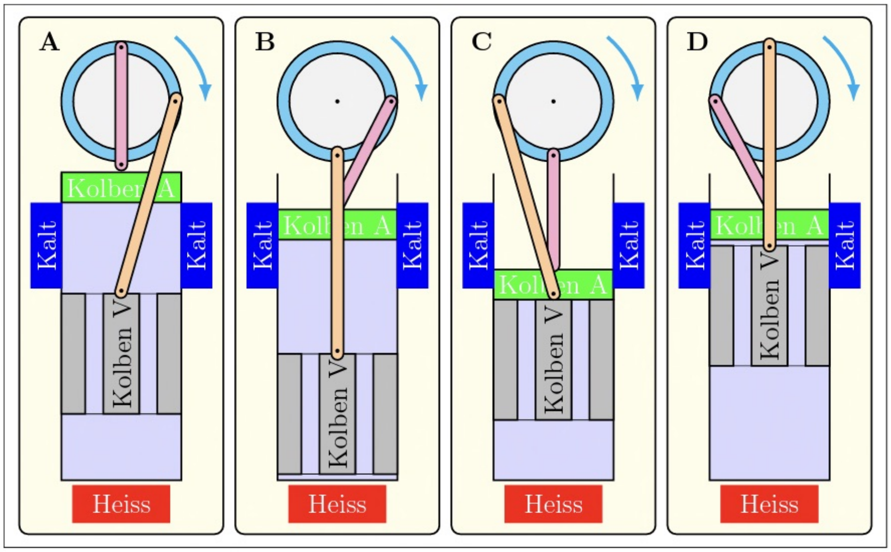
4 $$\Delta Q^{\nearrow\swarrow} = 0$$
$$\Delta W^{\swarrow} = \nu \cdot C_V \cdot (T_w - T_k)$$

2 und 4

$$T_w \cdot V_2^{\kappa-1} = T_k \cdot V_3^{\kappa-1}$$
$$T_k \cdot V_4^{\kappa-1} = T_w \cdot V_1^{\kappa-1}$$

und somit $V_1 \cdot V_3 = V_2 \cdot V_4$

Stirlingmotor



A: isotherme Expansion
B: isochore Abkühlung
C: isotherme Kompression
D: isochore Erwärmung

Entropie:

$$S = k \ln(W)$$

dabei steht W für die Wahrscheinlichkeit, dass ein ideales Gas einen Zustand einnimmt.

2-ter Hauptsatz

Die Entropie eines geschlossenen Systems kann nie abnehmen.

$$dS = \frac{\Delta Q_{rev}}{T}$$

Latente Wärme

Wärme, die benötigt wird, um einen Phasenübergang der gesamten Stoffmenge zu bewirken, ist zur spezifischen latenten Wärme L_m proportional.

$$Q = m \cdot L_m$$

3-tes Hauptsatz

Es ist unmöglich den absoluten Nullpunkt zu erreichen.

Nachtrag

adiabatische Prozesse = kein Wärmeaustausch

Dieselmotore: $\mu = 1 - \frac{|\delta Q_k|}{|\delta Q_w|}$

VEKTORANALYSIS

Volumenelement

$dV = dx\,dy\,dz$

Gradient

Sei $u(\vec{r})$ ein skalares Feld. Dann ist die Änderung du des Feldes gleich

$$d\vec{s} \cdot \text{grad}\, u = d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} u$$

Nabla-Operator

wobei

$$\vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\vec{s} = (dx, dy, dz)$$

Niveauflächen

Für Niveauflächen ist u konstant und somit

$$du = d\vec{s}_0 \cdot \vec{\nabla} u = 0 \qquad (d\vec{s} \perp \vec{\nabla} u)$$

$d\vec{s}_0$ verläuft tangential zu den Niveauflächen.

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \\ \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \end{pmatrix}$$

Für konservative Kräfte gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ⚠ AS

Mögliche Aufgaben

1) Berechne Gradient und zeichne ihn:

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} f$ ausrechnen und Punkte einsetzen!

2) Ist das Feld konservativ?

$\Rightarrow$ rechne $\operatorname{rot}(\vec{F})$ aus

falls $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F}$ konservativ.

3) Berechne das Potential von $\vec{F}$.

$\Rightarrow$ Partielle Integration

⚠ Vorzeichen anders!

für Flächenel

Gauss'sche Satz

$$\int_V \mathrm{div}(\vec{v})\, d\vec{V} = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Flächenelement $\leftrightarrow$ Volumenelement

Stokes'sche Satz

$$\int_A \mathrm{rot}(\vec{v})\, d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{v}\, d\vec{s}$$

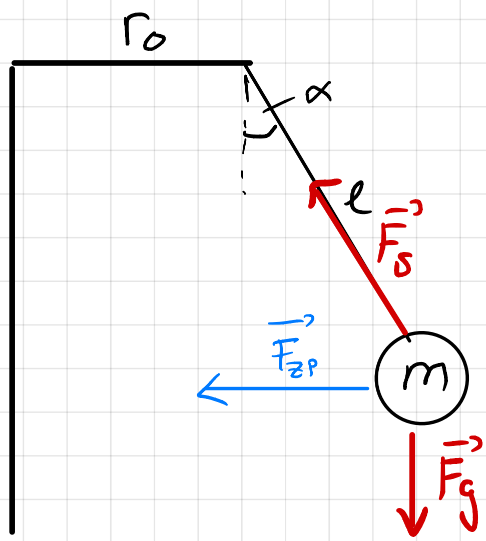
Flächenelement $\leftrightarrow$ Linienelement

Fluss

$$\Phi = \oint \vec{v}\, dA$$ (Gauss nützlich!)

AUFGABENSAMMLUNG

Kettenkarussell



$\vec{F_S}$: Seilkraft (unbekannt)

$\vec{F_g}$: Gewichtskraft ($m \cdot g$)

α : Neigungswinkel

$\vec{F_{ZP}}$: Zusammengesetzte Kraft (Zentripetalkraft)

$\vec{F_{ZP}} = \vec{F_S} \cdot \sin(\alpha)$ $\qquad$ $\vec{F_S} \cdot \cos(\alpha) = \vec{F_g}$

$\vec{F_{ZP}} = \vec{F_g} \cdot \tan(\alpha)$

$\vec{F_{ZP}} = m \frac{v^2}{r}$ oder $m\omega^2 r$ $\qquad$ ω : Winkelgeschw. Karussell

⚠ gesamtes r nehmen

$r = r_0 + \ell \cdot \sin(\alpha)$

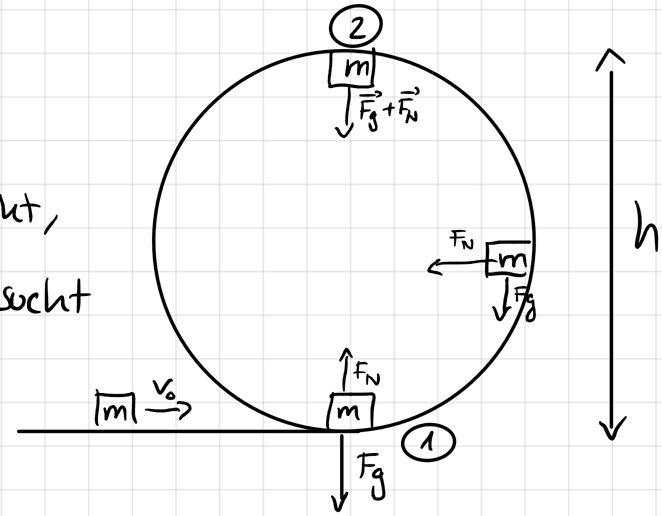
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 \cdot (r_0 + \ell \cdot \sin(\alpha))}{g}\right)$$

Looping

$\vec{F}_N \rightarrow 0$ im höchsten Punkt, falls minimale Geschw. gesucht wird.

$$\vec{F}_{ZP} = \cancel{m}\frac{v_r^2}{r} = \cancel{m} \cdot g$$

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$



① $F_N = F_g + \vec{F}_{ZP}$

Anhand von Energieerhaltung kann nun die minimale Geschwindigkeit ermittelt werden:

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{\cancel{m}v_0^2}{2} = \cancel{m}gh + \frac{\cancel{m}v^2}{2}$$

$$v_0^2 = 2gh + \frac{gh}{2}$$

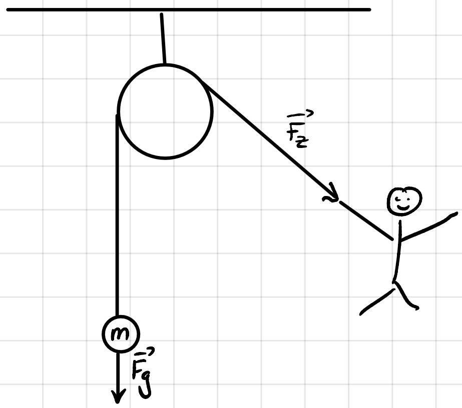
$$v_0^2 = \frac{5gh}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{5gh}{2}}$$

Wichtig: $\vec{F}_{ZP}$ bleibt während des ganzen Vorgangs die Summe aller Kräfte und konstant.

Beispiel: rechts im Looping gilt $\vec{F}_N = \vec{F}_{ZP}$

Rollen

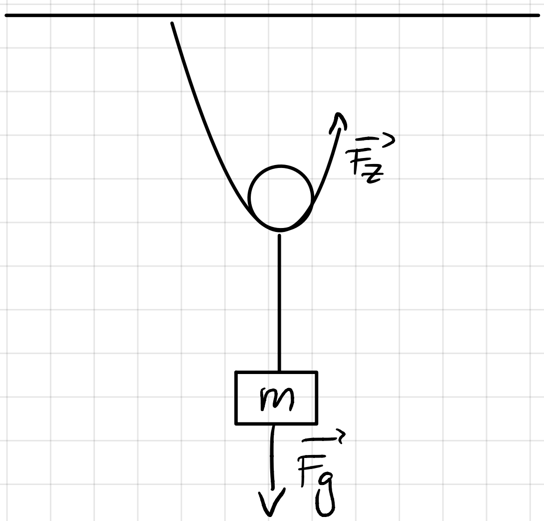
Für feste Rollen gilt immer (bei $\vec{F_R} = 0$)



$$|\vec{F_z}| = |\vec{F_g}|$$

Richtung von $\vec{F_z}$ beliebig!

Für lose Rollen gilt



$$F_z = \frac{1}{2} \vec{F_g}$$

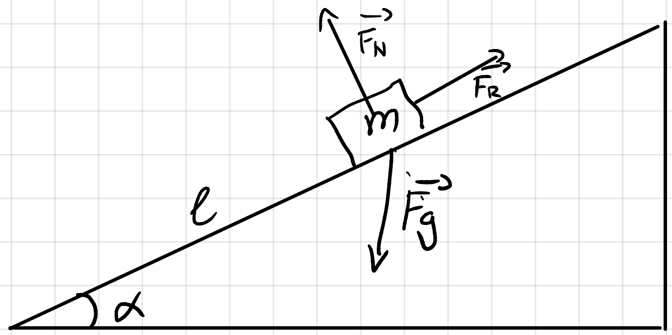
Bei Flaschenzügen mit n losen Rollen gilt

$$|\vec{F_z}| = \frac{1}{n} \cdot |\vec{F_a}|$$

Will man m um h erhöhen, muss man die Länge: $s = h \cdot n$ ziehen.

Beweis per Induktion.

Am Hang



$$\boxed{F_N} = F_g \boxed{\cos\alpha}$$

$$\boxed{F_{res}} = F_g \boxed{\sin\alpha} - F_R \qquad (F_R = F_g \cos\alpha \cdot \mu)$$

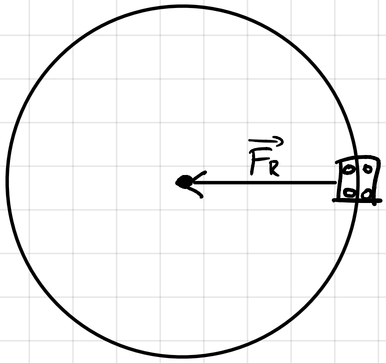
$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Zeit, die m für Strecke ℓ braucht:

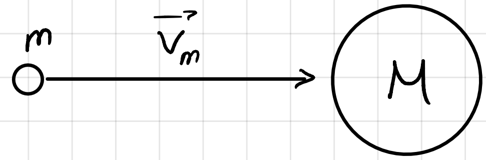
$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}}$$

Kurve

In der Kurve ist die Zentripetalkraft die Reibungskraft.



Teilchenstösse



elastisch

Impulserhaltung + Energieerhaltung

⚠ Beachte, dass nach dem Stoss beide eine Geschwindigkeit haben falls die Massen nicht gleich sind.

inelastisch

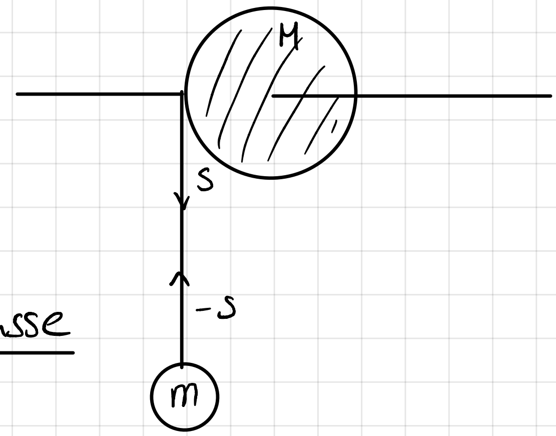
KEINE ENERGIEERHALTUNG

abe: Impulserhaltung gilt : $m_1 \cdot v = (m_1 + m_2)\, v'$

Nach dem Stoss kann wieder Energieerhaltung angewendet werden.

Laufrolle

$$J_{Rolle} = \frac{1}{2} M R^2$$



Bewegungsgleichung der Masse

$$ma = mg - S$$

Bewegungsgleichung der Laufrolle

$$J \ddot{\varphi} = S R$$

$$S = \frac{J \ddot{\varphi}}{R}$$

$$mg - ma = \frac{J \ddot{\varphi}}{R}$$

$$ma = mg - \frac{J \ddot{\varphi}}{R}$$

ohne Schlupf : $a := R \ddot{\varphi}$

$$m \cdot R \ddot{\varphi} = mg - \frac{J \ddot{\varphi}}{R} \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{mg}{\left(\frac{1}{2} M + m\right) \cdot R}$$

Thermisches Gleichgewicht

Zwei Massen/Gase mit verschiedenen Temperaturen werden in ein System gebracht. Nun soll die Endtemperatur berechnet werden:

$$\Delta Q_{zu} = -\Delta Q_{ab} \; \overset{!}{}$$

z.B. mit $c_m \cdot m \cdot \Delta T$ berechnen

⚠ latente Wärme auch miteinbeziehen wo nötig!

Nützlich

A: Ist $\vec{F}$ konservativ?

L: $\mathrm{rot}(\vec{F})$ berechnen. Falls $= 0_v$ ist $\vec{F}$ konservativ