2.4. Potenzregeln

Zunächst müssen die Begriffe *Basis* und *Exponent* eingeführt werden:

x^3 x ist die Basis und 3 ist der Exponent

Bei gleicher Basis (unten) gilt:

Ist die Basis gleich und es handelt sich um eine Multiplikation, so werden die Exponenten addiert:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

Ist die Basis gleich und es handelt sich um eine Division, so werden die Exponenten subtrahiert:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$$

Für Ausdrücke mit doppeltem Exponenten gilt:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \qquad \left(x^3\right)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$$

Bei gleichem Exponenten (oben) gilt:

Sowohl bei der Multiplikation als auch bei der Division kann man den Ausdruck in eine Klammer schreiben:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \qquad x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad \frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3$$

Diese Regel ist in beide Richtungen anwendbar d.h. von links nach rechts und von rechts nach links.

Merke:

Irgendwas hoch null ergibt immer 1: $a^0 = 1$ also $25^0 = 1$

Null hoch irgendwas ist immer 0: $0^a = 0$ also $0^{25} = 0$

Null hoch null ist allerdings nicht definiert: $0^0 = \textit{nicht definiert}$

Wie wirkt sich ein **negativer Exponent** aus?

Dazu gibt es 3 Merksätze, wobei der erste extrem wichtig ist. Seltener ist der zweite Merksatz anzuwenden, aber dort, wo man ihn anwenden kann, ist er sehr praktisch. Merksatz Nummer drei kommt extrem selten vor und ist daher nicht so wichtig.

Merksatz Nr.1: Negativer Exponent bedeutet 1 durch und Vorzeichen des Exponenten Wechseln.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad => \qquad x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

Merksatz Nr.2: Negativer Exponent bei Brüchen bedeutet Seitenwechsel, aber nur, solange eine Strichrechnung (+ oder -) den Seitenwechsel nicht verbietet. Auch hier muss nach dem Wechsel das Vorzeichen des Exponenten geändert werden.

$$\frac{x^3 \cdot y^{-2}}{z^{-4}} = \frac{x^3 \cdot z^4}{y^2} \qquad \frac{x^3 + y^{-2}}{z^{-4} - x^2} = \textit{nicht möglich}$$

Merksatz Nr.3: Bezieht sich der negative Exponent über eine Klammer auf einen Bruch, so kann man von dem Bruch den Kehrwert bilden und den negativen Exponenten in einen positiven umwandeln.

$$\left(\frac{3x}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3x}\right)^{2}$$

Wurzelausdrücke und Potenzrechnung:

Jeder Wurzelausdruck ist eine Potenz mit einem Bruch als Exponenten. Man kann jeden Wurzelausdruck als Potenz schreiben und auch umgekehrt jede Potenz, bei der der Exponent ein Bruch ist, als Wurzelausdruck schreiben:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \qquad => \qquad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Diese Umformung funktioniert, wie oben erwähnt, in beide Richtungen.

Beispielaufgaben zum Thema Potenzrechnen:

$x^{2n} \cdot x^{n+1} = x^{2n+n+1} = x^{3n+1}$

$\frac{x^3}{x^{n-2}} = x^{3-(n-2)} = x^{3-n+2} = x^{5-n}$

$\left(x^n\right)^{n+2} = x^{n\cdot(n+2)} = x^{n^2+2n}$

$\left(x^{n+2}\right)^{n-2} = x^{(n+2)\cdot(n-2)} = x^{n^2-4}$

$3^x \cdot 4^x = (3\cdot 4)^x = 12^x$

$\frac{9^x}{2^x} = \left(\frac{9}{2}\right)^x = 4{,}5^x$

Tipp für die Beispielaufgaben:

Ist der Exponent ein Term, so sollte man beim Umformen sicherheitshalber eine Klammer um den Term setzen.