Beispiel rekursiv $\to$ explizit

Hrvoje Krizic
hkrizic@ethz.ch

Sei eine rekursive Formel gegeben:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{6}{n^2}, \quad a_0 = 0 \tag{1}$$

Nun möchten wir eine explizite Formel für a_n finden. Das heisst: wir möchten a_n als Funktion von n ausdrücken. Das Problem ist nun, dass momentan in der rekursiven Formel rechts a_{n-1} vorkommt. Wie bringen wir das weg? Wir kennen die rekursive Formel. Aber da die rekursive Formel für jedes n gilt, können wir auch

$$a_{n-1} = a_{n-2} + \frac{6}{(n-1)^2} \tag{2}$$

Denn rechts muss einfach das letzte Glied vor dem Glied links stehen. Ob es nun n und $n-1$ sind, oder $n-1$ und $n-2$, die rekursive Formel ist für alle aufeinanderfolgende Pärchen korrekt. Man beachte aber, dass sich nun auch der Bruch $\frac{6}{n^2}$ ändert. Denn im Nenner quadrieren wir einfach den Index des Glieds auf der linken Seite. Also im ersten Fall wäre es einfach n. Aber im zweiten Fall ist es $n-1$. Nun setzen wir die Formel (2) in die Formel (1) ein und erhalten:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{6}{n^2} \tag{3}$$

$$\implies a_n = a_{n-2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{4}$$

Ist ja schön und gut so, nur wie soll uns dies weiterbringen? Das Ziel dieser Idee ist es, diesen Prozess $n-$Mal zu machen. Wir sehen, dass wir jetzt eine rekursive Formel für a_n gefunden haben, welche nur noch von a_{n-2} abhängig ist. Wenn wir nun a_{n-2} wieder durch die rekursive Folge

$$a_{n-2} = a_{n-3} + \frac{6}{(n-2)^2} \tag{5}$$

ersetzen, erhalten wir

$$a_n = a_{n-2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{6}$$

$$\implies a_n = a_{n-3} + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{7}$$

Und wenn wir das immer so weiter machen, erhalten wir

$$a_n = a_{n-3} + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{8}$$

$$\implies a_n = a_{n-4} + \frac{6}{(n-3)^2} + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{9}$$

$$\implies a_n = a_{n-5} + \frac{6}{(n-4)^2} + \frac{6}{(n-3)^2} + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{10}$$

$$\implies a_n = a_{n-6} + \frac{6}{(n-5)^2} + \frac{6}{(n-4)^2} + \frac{6}{(n-3)^2} + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{11}$$

$$\vdots \tag{12}$$

Wir sehen ein Muster! Es kommt immer ein Faktor $\frac{6}{(n-k)^2}$ dazu[1]. Wenn wir das also $n-$Mal weiterführen, müssten wir genau

$$a_n = a_{n-n} + \frac{6}{(n-k)^2} + \frac{6}{(n-k+1)^2} + \frac{6}{(n-k+2)^2} + \ldots + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2}$$

erhalten. Aber $n-n=0$ und $n-k=1$ (siehe Fussnote) und somit

$$a_n = a_0 + \frac{6}{1^2} + \frac{6}{2^2} + \frac{6}{3^2} + \ldots + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} \tag{13}$$

Wir haben es geschafft, eine explizite Formel zu finden, denn a_0 ist ja definiert durch die Anfangsbedingung $a_0 = 0$! Nun können wir $a_0 = 0$ also einsetzen und den Rest als eine Summe schreiben:

$$a_n = \frac{6}{1^2} + \frac{6}{2^2} + \frac{6}{3^2} + \ldots + \frac{6}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-1)^2} + \frac{6}{n^2} = \sum_{d=1}^{n} \frac{6}{d^2} \tag{14}$$

Die Summe kann nicht gross vereinfacht werden. Der Grenzwert für $n \to \infty$ aber schon, das sprengt aber den Rahmen dieser ersten Übungsstunde[2].

[1] Dieses $n-k$ ist immer eins grösser, als der Index des rekursiven Glieds, bei a_{n-5} ist es $n-k=n-4$ und bei a_{n-30} wäre es $n-k=n-29$

[2] Die Reihe zu berechnen war ein bekanntes Problem im 17. und 18. Jahrhundert: das Basler-Problem. Die Summe ergibt genau π^2 und bewiesen wurde dies 1735 vom schweizer Mathematiker Leonhard Euler