Übungsstunde 10

PLAN

- ☐ Serie 9 Aufg. 3c) ← Verallg. Kettenregel selber studieren! (siehe Tipps)
- ☐ Kritische Punkte
- ☐ Tangentialebene
- ☐ Implizite Diff.

Aufgabensammlung (Prüfungen)

So20, Aufg. 4 : $g(x,y) = y^2 - x^3 + y^2 x - 7$

$$y' = -\frac{g_x}{g_y} = -\left.\frac{-3x^2+y^2}{2y+2yx}\right|_{(1,2)} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$$

So 21, Aufg. 4 : $f_x = 2xy^2 + 3x^2 - 3 \overset{!}{=} 0$

$f_y = 2x^2 y \overset{!}{=} 0$

$x = 0 \Rightarrow$ keine Lös

$y = 0 \Rightarrow (1,0)$ und $(-1,0)$

$D = 12x^2(x - y^2)$

$\Rightarrow D(1,0) = 12 \rightarrow$ lok. Minimum

$\Rightarrow D(-1,0) = -12 \rightarrow$ Sattelpunkt

So18, Aufg. 4 : $\rightarrow \ell(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 9x^2 + 1 \\ g_y &= -4y - 2 \end{aligned}\right\} \ell(x,y) = 0 + 10(x-1) - 6(y-1)$$

$a = 10$ $b = -6$

Sommer 2020, Aufgabe 4

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 - x^3 + y^2 x - 7$.

(ii.) Sei C die Niveaukurve der Funktion g zur Höhe 0.
Die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(1, 2)$ ist

- ○ -8
- ○ $\frac{1}{8}$
- ○ $-\frac{1}{8}$
- ○ 8

Sommer 2021, Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 y^2 + x^3 - 3x$.

(b) [**5 Punkte**] Finden Sie alle kritischen Punkte von f und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um einen Sattelpunkt, ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Sommer 2018, Aufgabe 4

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = 3x^3 - 2y^2 + x - 2y$.

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion g im Punkt $(1, 1, 0)$ ist gegeben durch

$$l(x, y) = z = a(x - 1) + b(y - 1).$$

Bestimmen Sie a und b.

Antwort: $a =$ ____________________ $b =$ ____________________

SERIE 9 3c)

$h(x,y) = e^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^2$

$h_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - 16x = 2x(e^{x^2+y^2} - 8) \overset{!}{=} 0$

$h_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} - 8y = 2y(e^{x^2+y^2} - 4) \overset{!}{=} 0$

Fallunterscheidung

- $x=0,\ y=0 \Rightarrow P(0|0)$
- $x=0,\ e^{x^2+y^2} - 4 = 0 \Rightarrow e^{y^2} - 4 = 0 \quad y = \pm\sqrt{\ln(4)} \Rightarrow P(0|\pm\sqrt{\ln(4)})$
- $e^{x^2+y^2} - 8 = 0,\ y=0 \Rightarrow e^{x^2} - 8 = 0 \quad x = \pm\sqrt{\ln(8)} \Rightarrow P(\pm\sqrt{\ln(8)}|0)$
- $e^{x^2+y^2} - 8 = 0,\ e^{x^2+y^2} - 4 = 0 \Rightarrow$ ↯ keine Lösung

$\Rightarrow P(0|0),\ P(0|\underbrace{\pm\sqrt{\ln(4)}}_{* \pm\sqrt{2\ln(2)}}),\ P(\underbrace{\pm\sqrt{\ln(8)}}_{** \pm\sqrt{3\ln(2)}}|0)$

da $*\ \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$

$**\ \ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$

7.3.2 Implizite Differentiation

Sei eine Funktion $F(x,y) = 0$ gegeben. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist $F(x,y) = x + y - 1 = 0$. Wir können diese Funktion als Graph zeichnen, indem wir zunächst nach y auflösen. Es gilt $y = 1 - x$ und somit ist der Graph der Funktion eine Gerade. Die Steigung dieser Gerade ist -1, wie sich aus der Ableitung ermitteln lässt. Sei nun die Funktion $F(x,y) = xye^{x+y} - 2 = 0$ gegeben. Diese Funktion lässt sich nicht nach x oder y auflösen. Es gibt aber einen einfachen Weg, wie wir die Ableitung $y'(x)$ finden können, ohne $F(x,y)$ explizit nach $y(x)$ aufzulösen. Ohne einen Beweis zu geben, gilt folgende Formel:

$$\boxed{y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.}$$

Es sei zu bemerken, dass $F(x,y)$ unbedingt $= 0$ sein muss. Ansonsten funktioniert dieser Trick nicht. Ebenfalls muss darauf geachtet werden, dass $F_y(x,y) \neq 0$.

PRÜFUNGSAUFG

7.4 Extrema

Wir wollen nun zurück zur Frage kommen, wie wir Maxima und Minima einer Funktion bestimmen können. Dazu müssen wir die kritischen Punkte (Sattelpunkte oder Extrema) der mehrdimensionalen Funktion bestimmen und klassifizieren.

7.4.1 Bestimmung der kritischen Punkte

Extrema und Sattelpunkte haben eine Sache gemeinsam: die ersten partiellen Ableitungen nach jeder Variable sind gleich 0. Genauer gesagt gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Extrema und Sattelpunkte nennen wir *kritische Punkte*. Diese lassen sich ähnlich bestimmen wie im eindimensionalen Fall. Das Vorgehen bei mehrdimensionalen Funktionen wird im folgenden Rezept zusammengefasst. Wir nehmen im gesamten Rezept an, dass alle Ableitungen existieren und stetig sind.

Rezept. (Bestimmung kritischer Punkte)

1. Wir berechnen die partiellen Ableitungen und setzen beide 0. Daraus ergeben sich zwei Gleichungen. Mithilfe dieser zwei Gleichungen können wir x_0 und y_0 bestimmen und erhalten die kritischen Punkte.
2. Bestimme f_{xx}, f_{yy} und f_{xy}.
3. Sei $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$. Berechne $D(x_0, y_0)$ (kritische Punkte einsetzen) und unterscheide folgende Fälle:
   i. $D(x_0, y_0) > 0$: der Punkt ist eine lokale Extremstelle. Falls $f_{xx} < 0$ gilt, so handelt es sich um ein lokales Maximum, und falls $f_{xx} > 0$ gilt, handelt es sich um ein lokales Minimum.
   ii. $D(x_0, y_0) < 0$: der Punkt ist ein Sattelpunkt und keine Extremstelle.

Im Spezialfall von $D = 0$ müssen wir anders vorgehen. Dies sprengt aber den Rahmen dieses Buches. Wir fokussieren uns auf das Anwenden des Rezeptes an einigen Beispielen stattdessen.

Beispiel

Beispiel. Untersuche kritische Punkte von $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - x$.

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Wir setzen die partiellen Ableitungen gleich* 0*:*

$$f_x = y - 2x - 1 \overset{!}{=} 0,$$
$$f_y = x - 2y \overset{!}{=} 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 2y$*. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies* $x = -\frac{2}{3}$*. Somit ist* $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ *unser Kandidat.*

2. *Die zweiten partiellen Ableitungen sind*

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = 1.$$

Sie sind alle konstant und somit auch stetig.

3. *Wir bestimmen nun* $D\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$*. Es gilt*

$$D\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = (-2) \cdot (-2) - 1^2 = 3 > 0.$$

Somit haben wir ein lokales Maximum in $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Es ist noch zu bemerken, dass wir im Rezept beim ersten Fall nur f_{xx} betrachten. Tatsächlich können wir aber auch f_{yy} untersuchen und haben genau die gleichen Bedingungen. Wieso? Wenn f_{xx} und f_{yy} umgekehrte Vorzeichen haben, dann ist das Produkt der beiden negativ. Da $(f_{xy})^2$ immer positiv ist, ist somit $D =$ negativ $-$ positiv $=$ negativ. Wenn die Vorzeichen unterschiedlich sind, haben wir also einen Sattelpunkt. Wenn die Vorzeichen hingegen gleich sind, so gilt der erste Fall. Da uns beim Unterschieden zwischen Minima und Maxima nur das Vorzeichen von f_{xx} interessiert, ist es egal, ob wir f_{xx} oder f_{yy} betrachten, da im ersten Fall beide das gleiche Vorzeichen haben. Dazu also folgender Trick:

Trick. Falls die Vorzeichen von $f_{xx}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ unterschiedlich sind, so ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt.

PRÜFUNGSAUFG

7.5 Tangentialebene

Wir haben bei eindimensionalen Funktionen gelernt, dass wir an jeder differenzierbaren Stelle eine Tangente anlegen können. Die Tangente am Punkt x_0 war dann gegeben durch $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Bei mehrdimensionalen Funktionen sind diese Tangenten Tangentialebenen. Also Ebenen, welche den Graphen nur berühren, aber nicht schneiden. Die Tangentialebene am Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch[2]

$$\boxed{E(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0).}$$

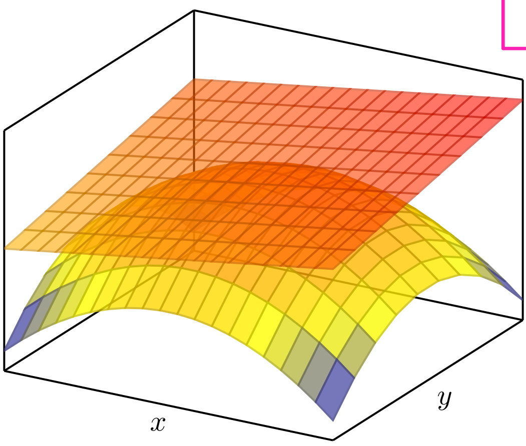
Für einen kritischen Punkt gilt aus $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ dann $E(x,y) = f(x_0,y_0)$ (also $E(x,y)$ konstant und somit horizontal). Eine Tangentialebene für $f(x,y) = -x^2 - y^2$ im Punkt $(1,1)$ ist beispielsweise gegeben durch

Beispiel

$$E(x,y) = -2(x + y - 1).$$

$E(x,y)$ und $f(x,y)$ sind in der folgenden Grafik abgebildet:

PRÜFUNGSAUFG.



[2] Es ist wichtig zu beachten, dass allein die Existenz von partiellen Ableitungen nicht ausreicht, um sicherzustellen, dass eine Tangentialebene existiert. Insbesondere kann es vorkommen, dass die Funktion $f(x,y)$ an einem Punkt (x_0, y_0) in beiden Variablen partiell differenzierbar ist, jedoch an dieser Stelle unstetig ist.