Übung 9

PLAN

- ☐ Serie 8 (1b)
- ☐ Volumenintegrale
- ☐ part. Ableitungen
- ☐ krit. Punkte

SERIE 8

1b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ Niveaulinien $-2, -1, 0, 1, 2$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = c \Rightarrow x = cx^2 + cy^2$$

Kreis mit Mittelpunkt (a,b)

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0$$

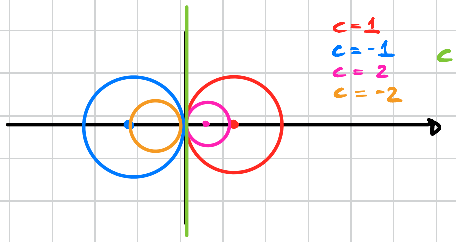
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{1}{2c}\right)^2 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2$$

$$a = \frac{1}{2c}$$

$$\left(x - \underbrace{\frac{1}{2c}}_{a}\right)^2 + y^2 = \left(\underbrace{\frac{1}{2c}}_{r}\right)^2$$



$c = 1$
$c = -1$
$c = 2$
$c = -2$

$c = 0$?

$$\frac{x}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Volumenintegrale

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x),\ u(x,y) \le z \le v(x,y)\}$$

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\ \underbrace{dz\, dy\, dx}_{dV}$$

Vor allem wichtig in Physik.

Bsp: PLANET weiss ρ Dichte $\Rightarrow$ was ist Masse $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$

$$M = \iiint \rho(x,y,z)\ dV$$

Volumen von B: $V_B = \iiint_B 1\, dV$

Part. Ableitungen

↳ leite mehrdim. Fkt nur nach <u>einer</u> Variable ab (alle anderen konstant)

Notation: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \partial_x f(x,y) = f_x(x,y)$

↳ **Bsp**: $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Berechne $f_x(x,y)$.

Sol: $f_x(x,y) = 2x e^{x^2+y^2}$

Aufg.

Beispiel. Sei $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y)$. Berechne $f_x(x_0,y_0)$ und $f_y(x_0,y_0)$.

Lösung. *Wir berechnen zunächst $f_x(x_0,y_0)$:*

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\sin\left(x^2\right)\cos(y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 2x_0\cos\left(x_0^2\right)\cos(y_0).$$

Bei solchen Aufgaben, kann man auch Terme wie $\cos(y)$ durch C ersetzen, da sie konstant sind, und am Schluss den eigentlichen Term wieder für C einfügen. Für die partielle Ableitung nach y denken wir uns x als Konstante und erhalten

$$\begin{aligned} f_y(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\sin\left(x^2\right)\cos(y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}C\cos(y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ &= -C\sin(y_0) = -\sin\left(x_0^2\right)\sin(y_0). \end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

$$f_{xx} := (f_x)_x, \quad \underbrace{f_{xy} := (f_y)_x, \quad f_{yx} := (f_x)_y}_{\text{beide gleich! (Schwarz)}}, \quad f_{yy} := (f_y)_y$$

beide gleich ! (für genügend schöne Fkt)
(Schwarz)

Beispiel. Sei $f(x,y) = \sin(x^2y^2)$. Berechne f_{xy} und f_{yx}.

Lösung. *Wir berechnen zunächst f_{xy}. Die partielle Ableitung nach x ergibt*

$$f_x = 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right).$$

Anschließend rechnen wir $(f_x)_y$ aus, genauer gesagt die Ableitung von f_x nach y:

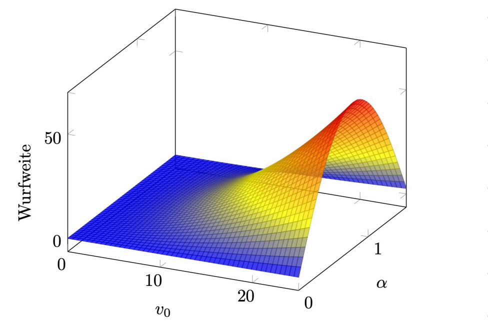
$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}2xy^2\cos\left(x^2y^2\right) = 4xy\cos\left(x^2y^2\right) - 4x^3y^3\sin\left(x^2y^2\right).$$

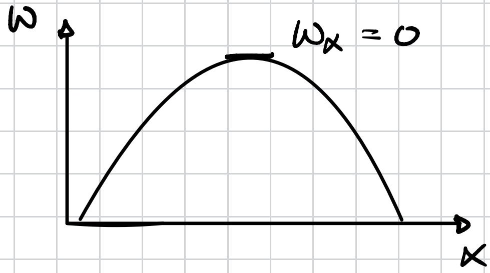
Wir bemerken nun, dass die partiellen Ableitungen stetig sind (Kompositionen von stetigen Funktionen) und somit gilt

$$f_{yx} = f_{xy} = 4xy\cos\left(x^2y^2\right) - 4x^3y^3\sin\left(x^2y^2\right).$$

Kritische Punkte

Punkte, welche $f_x(x,y) = 0$ und $f_y(x,y) = 0$ erfüllen.





Bsp

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\underbrace{f_x = 2x \overset{!}{=} 0 \;, \quad f_y = -2y \overset{!}{=} 0}_{(x,y) = (0,0)}$$

Aufg.

Beispiel. Untersuche kritische Punkte von $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - x$.

Lösung. *Wir gehen nach dem Rezept vor:*

1. *Wir setzen die partiellen Ableitungen gleich* 0*:*

$$f_x = y - 2x - 1 \overset{!}{=} 0,$$
$$f_y = x - 2y \overset{!}{=} 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 2y$*. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies* $x = -\frac{2}{3}$*. Somit ist* $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ *unser Kandidat.*