Lösung Problem 1

Sei also $f(x) = x^{x^{x^{\cdots}}}$. Da der Turm unendlich hoch ist, gilt aber auch $x^{f(x)} = x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = f(x)$. Wir schreiben also das Problem um:

$$f(x) = x^{f(x)}$$

Nun sollen wir $f'(x)$ finden. Es gilt:

$$f(x) = x^{f(x)} = e^{f(x)\ln(x)}$$

und somit

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{f(x)\ln(x)} \cdot (f(x)\ln(x))' \\ &= x^{f(x)} \cdot (f'(x)\ln(x) + f(x)\frac{1}{x}) \\ &= x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} \cdot (f'(x)\ln(x) + x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Da wir nun auf beiden Seiten $f'(x)$ haben, erhalten wir mit umformen nach $f'(x)$:

$$f'(x)(1 - x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}\ln(x)) = x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} \cdot x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} \cdot \frac{1}{x}$$

und somit

$$f'(x) = \frac{\left(x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}\right)^2}{x(1 - x^{x^{x^{x^{\cdots}}}}\ln(x))}$$