Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Komplexe

Zahlen

Ein Leitprogramm in Mathematik

Verfasst von
Christina Diehl
Marcel Leupp

Leitprogramm „Komplexe Zahlen“

Version Januar 2010

Stufe, Schulbereich
Sekundarstufe II, Gymnasium

Fachliche Vorkenntnisse
Rechnen mit reellen Zahlen
Lösen von quadratischen Gleichungen im Reellen
Trigonometrische Funktionen
Winkel im Bogenmaß
Addition und Subtraktion von Vektoren
Eulersche Zahl e

Bearbeitungsdauer
8 bis 10 Lektionen (ohne Hausaufgaben), je nach Schultypus und Vorkenntnissen

Das Leitprogramm ist als Einführung in die komplexen Zahlen gedacht. Im Anschluss daran kann die Lehrperson eigene Akzente setzen.

Autoren

Christina Diehl
Homburgerstrasse 29
4052 Basel
E-Mail: christina.diehl@math.ethz.ch

Marcel Leupp
Johannes-Baumann-Strasse 5
9100 Herisau
E-Mail: marcel.leupp@ksbg.ch

Einführung

„Komplexe Zahlen, das hört sich kompliziert an!“ werden Sie vielleicht denken. Aber nein, so kompliziert sind die gar nicht. Das werden Sie spätestens in diesem Leitprogramm feststellen. Wenn Sie dieses Leitprogramm durchgearbeitet haben, verfügen Sie über das nötige Grundwissen, um weiterführende Literatur zu studieren oder darauf aufbauende Kurse zu besuchen.

Warum komplexe Zahlen?
Die komplexen Zahlen stellen eine sinnvolle Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar - genau wie $\mathbb{R}$ eine Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ darstellt, oder $\mathbb{Q}$ eine Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, und diese wiederum eine Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Erinnern Sie sich: Viele Probleme konnten Sie erst lösen, nachdem Sie die reellen Zahlen kannten. Genauso ist es mit den komplexen Zahlen. Viele Probleme, die in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen, werden im Bereich der komplexen Zahlen endlich lösbar. Darüber hinaus erlaubt die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen eine elegante Beschreibung von geometrischen Abbildungen und führt zu einer Vielzahl neuer Fragestellungen.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Kapitel werden Sie sehen, wozu man komplexe Zahlen überhaupt braucht. Hier werden Sie behutsam in diese Theorie eingeführt.

Im zweiten Kapitel lernen Sie Rechenregeln für komplexe Zahlen kennen. Sie lernen, wie man komplexe Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert.

Im dritten Kapitel zeigen wir Ihnen, wie Sie mit Hilfe von komplexen Zahlen quadratische Gleichungen lösen können. Von nun an sind Sie in der Lage, *alle* quadratischen Gleichungen zu lösen!

Im vierten Kapitel finden Sie heraus, wie man komplexe Zahlen geometrisch darstellt. Durch diese neue Betrachtungsweise erhalten die Addition und Subtraktion eine geometrische Bedeutung.

Im fünften Kapitel lernen Sie eine zweite Darstellungsform für komplexe Zahlen kennen. Mit deren Hilfe erhalten auch die Multiplikation und Division eine geometrische Bedeutung. Dies ermöglicht eine elegante Beschreibung von geometrischen Abbildungen.

In den Addita können Sie dann noch einiges hinzulernen. Hier finden Sie etwas über Motten und Spiralen, ein paar theoretischere Themen sowie Juliamengen.

Wie geht es nun weiter?
Am besten lesen Sie zuerst in aller Ruhe die Arbeitsanleitung. Danach sind Sie gerüstet und können sich direkt in das Abenteuer durch die Welt der komplexen Zahlen stürzen. Viel Vergnügen!

Inhaltsverzeichnis

1 Was sind komplexe Zahlen? 6
1.1 Zahlbereichserweiterungen . . . 7
1.2 Die imaginäre Einheit i . . . 8
1.3 Komplexe Zahlen . . . 9
1.4 Reelle Zahlen sind auch komplexe Zahlen! . . . 11

2 Wie rechnet man mit komplexen Zahlen? 14
2.1 Addition und Subtraktion . . . 15
2.2 Multiplikation . . . 16
2.3 Konjugiert komplexe Zahlen . . . 18
2.4 Division . . . 19

3 Alle quadratischen Gleichungen sind lösbar! 22
3.1 Beispiele für quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen . 23
3.2 Quadratisches Ergänzen . . . 23
3.3 Die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen . . . 24

4 Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen 29
4.1 Die Gaußsche Zahlenebene . . . 30
4.2 Die Addition in der Gaußschen Zahlenebene . . . 32
4.3 Der Betrag einer komplexen Zahl . . . 34

5 Die Polarform komplexer Zahlen 38
5.1 Die Darstellung in Polarform . . . 39
5.2 Wie kann man Polarform und Normalform ineinander umrechnen? 41
5.3 Die Multiplikation und Division in Polarform . . . 44
5.4 e hoch i mal φ . . . 48

Additum A: Drei theoretische Vertiefungen 53

Additum B: Die logarithmische Spirale 56

Additum C: Juliamengen 61

Lösungen aller Aufgaben und Lernkontrollen 67

Literatur in der Handbibliothek 89

Arbeitsanleitung

Das Leitprogramm ist in fünf Kapitel gegliedert. Die Addita sind als Zusätze für Interessierte gedacht. Am Anfang der Kapitel finden Sie jeweils eine Übersicht. Außerdem erhalten Sie einen Überblick über die Lernziele des Kapitels. Sie arbeiten selbständig. Dabei können Sie ihr eigenes Arbeitstempo anschlagen.

Lesen Sie jeweils den Text sorgfältig durch. In den Text sind immer wieder Aufgaben eingestreut, die Ihnen helfen, das Gelernte zu üben und zu festigen.

Am Ende eines jeden Kapitels gibt es eine Lernkontrolle. Wenn Sie diese erfolgreich bearbeitet haben, melden Sie sich für den Kapiteltest. Haben Sie den Kapiteltest erfolgreich abgelegt, bearbeiten Sie das nächste Kapitel.

Beim Durcharbeiten der Kapitel werden Ihnen am Rand verschiedene Symbole begegnen. Sie haben die folgende Bedeutung:

Übersicht. Am Anfang jedes Kapitels bekommen Sie eine Übersicht über das Thema und den Aufbau des Kapitels.

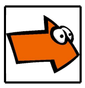
Lernziele. Sie erfahren, was Sie nach der Bearbeitung des Kapitels können werden.

Wichtige Regel. Neben diesem Symbol finden Sie wichtige Regeln oder Definitionen.

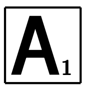
Warnung. Dieses Symbol erscheint immer dann, wenn Sie im Text auf typische Fehlerquellen aufmerksam gemacht werden.

Checkliste. An dieser Stelle sollten Sie jemanden bitten, Sie die Begriffe auf der Checkliste abzufragen. Notfalls fragen Sie sich selbst ab.

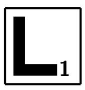
Extra. Dieser Pfeil weist Sie auf weiterführende Materialien hin. Wenn Sie wollen, können Sie sich dort genauer über ein Thema informieren.



Aufgabe. Dieses Symbol zeigt eine Aufgabe an. Die Aufgaben sind durch das gesamte Leitprogramm fortlaufend nummeriert.



Lösung. Die Lösungen zu allen Aufgaben und zu den Lernkontrollen finden Sie ganz am Ende des Leitprogramms. Damit Sie die passende Lösung schneller finden, erscheint in dem jeweiligen Symbol die zugehörige Aufgabennummer.



Lernkontrolle. Hier können Sie noch einmal testen, ob Sie das Kapitel erfolgreich bearbeitet haben.

Kapiteltest. Wenn Sie dieses Symbol sehen, können Sie sich zum Kapiteltest anmelden. Den Kapiteltest lösen Sie jeweils ohne Hilfsmittel oder die Benutzung der Unterlagen.

1 Was sind komplexe Zahlen?

In diesem Kapitel lernen Sie die komplexen Zahlen kennen. Sie werden feststellen, dass es sich bei diesen Zahlen keineswegs um mysteriöse oder komplizierte Gebilde handelt. Im Gegenteil: Die komplexen Zahlen sind eine natürliche „Erweiterung“ der reellen Zahlen.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt wird die Frage geklärt, warum wir überhaupt neue Zahlen einführen und damit den Zahlbereich der reellen Zahlen erweitern wollen.

Im zweiten Abschnitt wird zunächst eine einzige neue Zahl definiert: die imaginäre Einheit i.

Im dritten Abschnitt lernen Sie die komplexen Zahlen kennen. Dabei spielt i eine wichtige Rolle. Alle komplexen Zahlen sind nämlich mit Hilfe von i aus zwei reellen Zahlen zusammengesetzt.

Im vierten Abschnitt schließlich werden Sie sehen, dass die reellen Zahlen ebenfalls komplexe Zahlen sind. Das bedeutet, dass die Menge der komplexen Zahlen eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen ist.

Wie geht es nun weiter?
Lesen Sie sich zunächst die Lernziele durch. Gehen Sie dann zur nächsten Seite und legen Sie mit dem ersten Abschnitt los!

Lernziele:
Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie mit eigenen Worten erklären

- was die **imaginäre Einheit** i ist,
- was eine **komplexe Zahl** ist,
- was der **Realteil** einer komplexen Zahl ist,
- was der **Imaginärteil** einer komplexen Zahl ist, und
- was die Menge $\mathbb{C}$ ist.

Sie können ohne nachzuschlagen

- erste einfache Rechnungen mit i durchführen,
- den Realteil und Imaginärteil von komplexen Zahlen bestimmen, und
- gegebene Zahlen der richtigen Menge zuordnen.

1.1 Zahlbereichserweiterungen

Im Zahlbereich der reellen Zahlen können Sie uneingeschränkt alle Ihnen vertrauten Rechenoperationen ausführen. Alle? Nein! So stoßen Sie zum Beispiel beim Wurzelziehen an eine Grenze des Zahlbereichs: Die Gleichung $x^2 = -1$ ist unlösbar. Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Allgemeiner gilt: Quadratische Gleichungen sind manchmal lösbar und manchmal nicht.

Um diesen Mangel zu beheben, soll eine neue Zahl eingeführt werden. Das heißt, der Zahlbereich der reellen Zahlen soll erweitert werden. Dieses Vorgehen ist nicht neu! Ganz ähnlich wurde seinerzeit auch der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auf den Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erweitert.

Ausgangspunkt war damals die Frage nach der Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Diese Gleichung besitzt keine Lösung im Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Es gibt keine Bruchzahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Deshalb wurde eine neue Zahl eingeführt, welche die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar macht. Sie wurde mit $\sqrt{2}$ bezeichnet und hat die Eigenschaft, dass sie mit sich selbst multipliziert 2 ergibt: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Auf diese Weise wurde der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erweitert. Es entstand der weitaus umfassendere Zahlbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, der unter anderem auch alle Wurzeln enthält. (Aber Achtung! Es gibt auch reelle Zahlen, die keine Wurzeln sind. Zum Beispiel die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e.)

Bei dieser Erweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ wurden drei wesentliche Punkte eingehalten:

1. Die alten Zahlen sind ein Teil der neuen Zahlen. So sind beispielsweise die rationalen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen. Mit Symbolen ausgedrückt schreiben wir das als $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Alle Rechenoperationen, die mit den alten Zahlen möglich sind, sind auch mit den neuen Zahlen möglich. Die Erweiterung von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen erzeugt keine Einschränkungen.
3. Für die neuen Zahlen gelten dieselben Rechenregeln wie für die alten. So können Sie mit den reellen Zahlen genauso rechnen wie mit den rationalen Zahlen.

Diese drei Punkte nennen wir das *Permanenzprinzip* (von lateinisch *permanere* = bleiben). Es ist vernünftig, dieses Permanenzprinzip bei der Erweiterung eines Zahlbereichs zu fordern. Schließlich wollen wir so wichtige Eigenschaften wie die Gültigkeit der Rechenregeln nicht verlieren! Wie Sie sehen werden, werden wir das Permanenzprinzip auch bei der Erweiterung der reellen Zahlen beachten.

1.2 Die imaginäre Einheit i

Sie wissen: In $\mathbb{R}$, der Menge der reellen Zahlen, ist die Gleichung

$$x^2 = -1$$

nicht lösbar. Das Quadrat einer reellen Zahl ungleich null ist stets positiv.

Wir wollen den Bereich der reellen Zahlen nun so erweitern, dass die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar ist. Dazu führen wir eine neue Zahl ein, welche die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar macht. Diese neue Zahl nennen wir „imaginäre Einheit“ und bezeichnen sie mit dem Symbol i. Sie soll die Eigenschaft haben, dass sie mit sich selbst multipliziert -1 ergibt: $i \cdot i = -1$.

Was können wir uns nun unter diesem i vorstellen? Mit Sicherheit ist i keine reelle Zahl, denn wie oben bereits gesagt, ist das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ. Es gilt aber $i^2 = -1$, denn wir haben ja gefordert, dass i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ sein soll.

Wir wissen also nicht, wie i „aussieht“. Wir können aber bereits mit i rechnen. Nach dem dritten Punkt des Permanenzprinzips sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ ja weiterhin gültig sein. So können wir zum Beispiel i^3 berechnen:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$$

Legen Sie selbst los und bearbeiten Sie ebenso die folgende Aufgabe!

Aufgabe 1. Berechnen Sie

a) i^2 b) i^4 c) i^5 d) $(-i)^2$ e) $-i^2$

Die Lösung zu dieser wie zu allen anderen Aufgaben finden Sie im Lösungsteil am Ende des Leitprogramms.

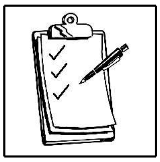
Früheren Mathematikern war die Zahl i übrigens etwas unheimlich. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) beispielsweise nannte sie „ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein“, für Leonhard Euler (1707-1783) war sie eine „unmögliche Zahl“, und noch Karl Friedrich Gauss (1777-1855) bezeichnete sie im neunzehnten Jahrhundert als „Schatten von Schatten“.

Da i also eine „unmögliche Zahl“ war, das heißt keine reelle Zahl, nannte man sie „imaginär“ (von lateinisch *imaginarius* = eingebildet). Die Bezeichnung geht auf René Descartes (1596-1650) zurück.

Nachdem wir die Zahl i nun schon ein bisschen kennen gelernt haben, halten wir ihre Definition fest:

Wir definieren eine neue Zahl i, welche die Gleichung $x^2 = -1$ löst, das heißt für die $i^2 = -1$ gilt. Wir nennen diese Zahl die **imaginäre Einheit**.

Zum Schluss dieses Abschnitts noch eine Warnung. Man ist natürlich in Versuchung, wie bei den reellen Zahlen $i = \sqrt{-1}$ zu schreiben. Tatsächlich findet man diese Schreibweise in einigen Lehrbüchern. Es gibt aber einen guten Grund, diese Schreibweise zu vermeiden. Wenn man nämlich mit diesem Wurzelsymbol ganz unbekümmert so rechnet, wie man das aus dem Reellen gewöhnt ist, dann stößt man schnell auf einen Widerspruch. Die Wurzelrechnung ist im Komplexen eben etwas „komplexer". Wenn Sie sich genauer dafür interessieren, dann können Sie im Anschluss an das Leitprogramm das Additum A bearbeiten. Wir halten jedenfalls fest: Die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ benutzen wir *nicht*.



Wie ist die Zahl i definiert?

1.3 Komplexe Zahlen

Nachdem wir nun die imaginäre Einheit i kennen gelernt haben, wollen wir diese mit den reellen Zahlen verknüpfen. Dazu bilden wir die so genannten „komplexen Zahlen". Das Wort „komplex" steht hier für „zusammengesetzt" (von lateinisch *complexus* = verflochten).

Beispiele für komplexe Zahlen sind

$1 + 3i, \qquad -1 + 4i, \qquad 2 - 5i, \qquad \frac{3}{4} + 7i, \qquad -\sqrt{3} - \sqrt{5}i.$

Sie alle sind zusammengesetzt aus einem reellen Anteil (bei $1 + 3i$ ist das beispielsweise 1) und einem imaginären Anteil (bei $1 + 3i$ ist das beispielsweise $3i$).

Das $+$-Zeichen in der komplexen Zahl $1 + 3i$ ist im Moment noch als Teil der neuen Zahl aufzufassen und wird erst später auch als Additionszeichen angesehen. Unter $3i$ versteht man $3 \cdot i$. Schließlich sollen nach dem Permanenzprinzip die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ für die Zahlen 3 und i weiterhin gültig sein.

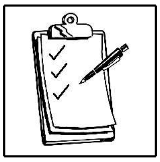
Wir definieren komplexe Zahlen nun allgemein:

Eine Zahl z der Form

$$z = a + bi$$

nennen wir **komplexe Zahl**. a und b sind dabei reelle Zahlen. i steht für die imaginäre Einheit i.

Bei der Schreibweise komplexer Zahlen gibt es eine kleine Besonderheit. Vielleicht erscheint sie Ihnen so natürlich, dass sie Ihnen gar nicht aufgefallen ist. Beispielsweise schreibt man $2-5i$ statt $2+(-5)i$. Dies ist kürzer und übersichtlicher.



Wie ist die Zahl i definiert?
Was versteht man unter einer komplexen Zahl?

Wir betrachten noch einmal die komplexe Zahl $2-5i$. Bei dieser Zahl spielen offensichtlich die 2 und die -5 eine besondere Rolle. Wenn Ihnen jemand sagt: „Bei der komplexen Zahl z ist der rein reelle Anteil 2, und vor der imaginären Einheit steht -5“, dann wissen Sie genau, um welche komplexe Zahl es sich handelt. Es kann nur $2-5i$ sein. Man kann auch sagen: Die komplexe Zahl $2-5i$ ist durch die reellen Zahlen 2 und -5 eindeutig festgelegt. Allgemeiner formuliert: Jede komplexe Zahl $a+bi$ ist durch die reellen Zahlen a und b eindeutig festgelegt.

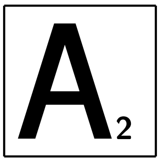
Um komplexe Zahlen auf diese Art beschreiben zu können, führen wir zwei neue Begriffe ein:

Unter dem „Realteil“ einer komplexen Zahl wollen wir in Zukunft den rein reellen Anteil der Zahl verstehen. Der Realteil der komplexen Zahl $2-5i$ ist also 2. Wir schreiben auch $\mathrm{Re}(2-5i)=2$.

Unter dem „Imaginärteil“ einer komplexen Zahl wollen wir in Zukunft den Teil der Zahl verstehen, der vor der imaginären Einheit i steht. Der Imaginärteil der komplexen Zahl $2-5i$ ist also -5. Wir schreiben auch $\mathrm{Im}(2-5i)=-5$.

Achtung! Der Imaginärteil von $2-5i$ ist gleich -5, also reell. Er ist *nicht* gleich dem rein imaginären Anteil der Zahl $2-5i$. Dieser wäre nämlich $-5i$.

Nun können Sie selbst ans Werk gehen! Bearbeiten Sie Aufgabe 2, um sich mit den neuen Begriffen vertraut zu machen.



Aufgabe 2. Geben Sie Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an. Verwenden Sie dazu die Schreibweisen Re und Im. (Schreiben Sie also beispielsweise $\mathrm{Re}(3+2i)=3$, $\mathrm{Im}(3+2i)=2$.)

a) $-1+4i$ b) $2-5i$ c) $\frac{3}{4}+7i$ d) $\sqrt{7}+\frac{5}{6}i$

Was sind wohl die Real- und Imaginärteile der folgenden Zahlen?

e) $\sqrt{5}i$ f) $-\frac{1}{6}$ g) i h) 0

i) „Für alle komplexen Zahlen z gilt: $z=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)$.“ Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wahrscheinlich hat es Ihnen keine Schwierigkeiten bereitet, die Fragen (e) bis (h) zu beantworten. Strenggenommen haben wir den Realteil und Imaginärteil von Zahlen wie $\sqrt{5}i$ oder $-\frac{1}{6}$ noch gar nicht definiert. Vermutlich haben Sie aber das Naheliegende getan: Sie haben $\sqrt{5}i$ als komplexe Zahl $0 + \sqrt{5}i$ interpretiert und $-\frac{1}{6}$ als die komplexe Zahl $-\frac{1}{6} + 0i$.

Allgemein verstehen wir unter bi (b reell) die komplexe Zahl $0 + bi$ und unter a (a reell) die komplexe Zahl $a + 0i$.

Zahlen der Form bi (b reell) nennen wir auch „rein imaginär“. Rein imaginäre Zahlen sind also komplexe Zahlen, deren Realteil gleich 0 ist.

Aufgabe 3. Geben Sie die komplexe Zahl z an, welche den folgenden Realteil und Imaginärteil besitzt:

a) $\mathrm{Re}(z) = -5, \quad \mathrm{Im}(z) = 3$

b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = 0$

c) $\mathrm{Re}(z) = 0, \quad \mathrm{Im}(z) = 8$

d) $\mathrm{Re}(z) = x, \quad \mathrm{Im}(z) = y \quad (x, y$ reell)

e) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(z)) = 0$, dann ist $z \in \mathbb{R}$.

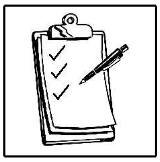
Zum Schluss halten wir die Definitionen der neuen Begriffe noch einmal fest:

Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, wobei a und b reell sind.

Dann heißt a der **Realteil** von z. Man schreibt auch $a = \mathrm{Re}(z)$.
b heißt der **Imaginärteil** von z. Man schreibt auch $b = \mathrm{Im}(z)$.

Es ist zu beachten, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von z *reelle* Zahlen sind.
Zahlen der Form bi heißen **rein imaginär**.

Was versteht man unter einer komplexen Zahl?
Wie ist der Realteil einer komplexen Zahl definiert?
Wie ist der Imaginärteil einer komplexen Zahl definiert?



1.4 Reelle Zahlen sind auch komplexe Zahlen!

Im vorigen Abschnitt haben wir vereinbart, dass wir für die komplexe Zahl $-\frac{1}{6}+0i$ kurz $-\frac{1}{6}$ schreiben. Die Zahl $-\frac{1}{6}$ ist uns aber als reelle Zahl bekannt.

Umgekehrt können wir jede reelle Zahl auf diese Weise als komplexe Zahl auffassen. Die reellen Zahlen sind gerade die komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0.

Wir können also die Menge der reellen Zahlen als Teilmenge der Menge der komplexen Zahlen auffassen. Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnen wir in Zukunft mit $\mathbb{C}$. Der letzte Satz bedeutet also ganz einfach, dass

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

gilt.

Erinnern Sie sich? Im ersten Punkt des Permanenzprinzips für eine Zahlbereichserweiterung haben wir gefordert: Die alten Zahlen sollen ein Teil der neuen Zahlen sein. Dieser Punkt wird also durch unsere neu definierten Zahlen erfüllt. Dass auch die anderen zwei Punkte erfüllt sind, werden Sie im nächsten Kapitel feststellen, wo es um das Rechnen mit den komplexen Zahlen geht.

Wir halten fest:

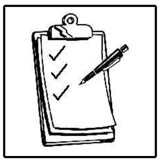
Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$. Es gilt

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Aufgabe 4. Geben Sie an, zu welchen der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die angegebenen Zahlen jeweils gehören:

a) 2 b) $-\sqrt{3}$ c) $3 + \frac{1}{2}i$ d) 0 e) $4i$

($\mathbb{N}$ steht für die natürlichen Zahlen ohne die Null, $\mathbb{Z}$ für die ganzen Zahlen.)



Wie ist die Zahl i definiert?
Was versteht man unter einer komplexen Zahl?
Wie ist der Realteil einer komplexen Zahl definiert?
Wie ist der Imaginärteil einer komplexen Zahl definiert?
Was ist die Menge $\mathbb{C}$?

Lernkontrolle

Sie haben das erste Kapitel durchgearbeitet? Dann testen Sie sich mit der Lernkontrolle A. Die Lösungen dazu finden Sie im Lösungsteil ganz am Ende des Leitprogramms.

Wenn Sie alle Aufgaben aus Lernkontrolle A erfolgreich bearbeitet haben, dann melden Sie sich für den Kapiteltest an. Den Kapiteltest lösen Sie ohne Hilfsmittel oder die Benutzung der Unterlagen.

Haben Sie bei der Bearbeitung von Lernkontrolle A Schwierigkeiten gehabt? Wenn es sich nur um Rechenfehler handelt, können Sie sich trotzdem zum Kapiteltest anmelden. Wenn es sich um Verständnisschwierigkeiten handelt, sollten Sie die entsprechenden Abschnitte noch einmal gründlicher ansehen.

Lernkontrolle A:

a) Berechnen Sie $-i^3$.

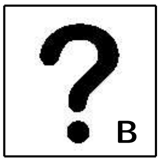
b) Geben Sie Realteil und Imaginärteil der Zahl $\frac{1}{7}$ an.
Welche komplexe Zahl besitzt den Realteil $\frac{1}{2}$ und den Imaginärteil $-\sqrt{3}$?

c) Zu welcher der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gehören die folgenden Zahlen?
-5, $\sqrt{7}i$, $\frac{2}{9}$.

d) „Für alle komplexen Zahlen z gilt $\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(z)) = 0$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sind Sie erfolgreich gewesen? Melden Sie sich zum Kapiteltest an!

Bearbeiten Sie Lernkontrolle B, wenn Sie den Kapiteltest nicht bestanden haben.



Lernkontrolle B:

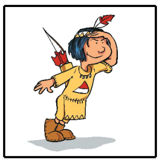
a) Berechnen Sie $(-i)^3$.

b) Geben Sie Realteil und Imaginärteil der Zahl $3 - \sqrt{2}i$ an.
Welche komplexe Zahl besitzt den Realteil 0 und den Imaginärteil -4?

c) Zu welcher der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gehören die folgenden Zahlen?
2, $2 - \frac{1}{3}i$, $-\sqrt{9}$.

d) „Für alle komplexen Zahlen z gilt $\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = z$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Wie rechnet man mit komplexen Zahlen?



Im vorigen Kapitel haben Sie einen neuen Zahlbereich kennen gelernt: die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. In diesem Kapitel lernen Sie, wie Sie mit diesen neuen Zahlen rechnen können. Bei den Rechenregeln für die komplexen Zahlen spielt das Permanenzprinzip eine wichtige Rolle. Die Rechenregeln, die Sie aus dem Reellen kennen, sind weiterhin gültig.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt lernen Sie, wie komplexe Zahlen addiert und subtrahiert werden. Beide Rechenarten sind sehr ähnlich.

Im zweiten Abschnitt lernen Sie die Multiplikation von komplexen Zahlen kennen.

Im dritten Abschnitt wird zunächst ein neuer Begriff eingeführt, der sich bei der Division von komplexen Zahlen als sehr nützlich erweisen wird. Es ist der Begriff der konjugiert komplexen Zahl. Jede komplexe Zahl besitzt eine so genannte konjugiert komplexe Zahl. Das Produkt beider Zahlen ist stets reell!

Im vierten Abschnitt schließlich lernen Sie, wie sie eine komplexe Zahl durch eine andere dividieren können. Auch hier hilft das Permanenzprinzip weiter.

Wie geht es nun weiter?
Lesen Sie sich zunächst die Lernziele durch. Anschließend stürzen Sie sich in das Abenteuer vom Rechnen mit komplexen Zahlen.

Lernziele:
Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie mit eigenen Worten erklären, was eine konjugiert komplexe Zahl ist.

Sie können die vier Grundrechenoperationen mit komplexen Zahlen durchführen, d.h. komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

2.1 Addition und Subtraktion

Wir betrachten die Addition von komplexen Zahlen an einem Beispiel. Nehmen wir einmal an, wir wollen $3 + i$ und $1 - 2i$ addieren. Gesucht ist also

$$(3 + i) + (1 - 2i).$$

Nach dem Permanenzprinzip, das Sie im vorigen Kapitel kennen gelernt haben, sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ weiterhin gültig sein. Wie würden Sie im Reellen addieren, wenn i eine Variable wäre? Ganz klar, Sie würden die beiden rein reellen Ausdrücke (d.h. die 3 und die 1) zusammenfassen, und ebenso die beiden rein imaginären Ausdrücke (d.h. i und $-2i$).

Das Gleiche tun wir auch hier. Wir schreiben

$$(3 + i) + (1 - 2i) = 3 + i + 1 - 2i = (3 + 1) + (i - 2i) = 4 - i.$$

Das Ergebnis der Rechnung lautet also $4 - i$.

Bei der Subtraktion funktioniert das Zusammenfassen der rein reellen Ausdrücke und der rein imaginären Ausdrücke ganz genauso. Wir müssen lediglich beachten, dass sich durch das Minuszeichen bei der zweiten Zahl die Vorzeichen ändern. Das ist Ihnen allerdings aus dem Rechnen mit reellen Zahlen bereits vertraut!

Zur Veranschaulichung subtrahieren wir die Zahlen aus dem obigen Beispiel:

$$(3 + i) - (1 - 2i) = 3 + i - 1 + 2i = (3 - 1) + (i + 2i) = 2 + 3i.$$

Beachten Sie, dass bei der zweiten Zahl durch das Auflösen der Klammer „$+2i$“ entsteht. Das Ergebnis der Rechnung lautet also $2 + 3i$.

Nun sollte es für Sie kein Problem mehr sein, selbst komplexe Zahlen zu addieren und zu subtrahieren:

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4 + 3i) + (2 + i)$

b) $(4 + 3i) - (2 + 3i)$

c) $(\frac{1}{4} + 2i) + (\frac{1}{5} - i)$

d) $\mathrm{Re}\,((-2 + i) - (-2 - 3i))$

e) $(\sqrt{5} + 3i) + (-2 + i) - (4i)$

f) $\mathrm{Im}\,(7 - (4 + 3i) - (5 - 4i))$

g) Schreiben Sie die imaginäre Einheit i als Summe zweier komplexer Zahlen.

h) Lässt sich 1 als Summe von zwei rein imaginären Zahlen schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nachdem Sie nun einige Beispiele gerechnet haben, soll die Addition und die Subtraktion von komplexen Zahlen noch in allgemeiner Form aufgeschrieben werden.

A6

Aufgabe 6. Ergänzen Sie den Text im Kasten.

Sind $a+bi$ und $c+di$ zwei komplexe Zahlen (d.h. a, b, c, d reell), dann gilt

$$(a+bi)+(c+di) = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$
$$(a+bi)-(c+di) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

In Worten ausgedrückt lautet das Ergebnis von Aufgabe 6:

!

Komplexe Zahlen werden addiert, indem man die Realteile und die Imaginärteile separat addiert. Das Entsprechende gilt für die Subtraktion.

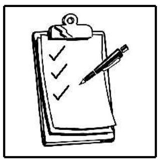
Lösen Sie Aufgabe 7, um ganz sicher zu gehen, dass Sie die Addition komplexer Zahlen beherrschen.

A7

Aufgabe 7. Berechnen Sie für $v = 6 - i$, $w = 4$ und $z = 5i$ die folgenden Ausdrücke:

a) $v - w - z$ b) $v + w - z$ c) $\mathrm{Re}(z+w)$ d) $\mathrm{Im}(z-v)$

e) Zeigen Sie: Sind z und w komplexe Zahlen, so ist $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$.



Wie werden komplexe Zahlen addiert bzw. subtrahiert?

2.2 Multiplikation

Wir wollen nun zwei komplexe Zahlen miteinander multiplizieren. Zum Beispiel die beiden Zahlen $3+i$ und $1-2i$. Gesucht ist also

$$(3+i)\cdot(1-2i).$$

Nach dem Permanenzprinzip sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ weiterhin gültig sein. Wir versuchen daher zunächst, die Klammer „ganz normal“ auszumultiplizieren. Wir schreiben also

$$(3+i)\cdot(1-2i) = 3 - 6i + i - 2i^2.$$

Es kommen nun nicht nur Ausdrücke mit i, sondern auch mit i^2 vor. Dieses i^2 können wir aber leicht ersetzen. Nach der Definition von i gilt ja $i^2 = -1$. Wir setzen also für i^2 die Zahl -1 ein und rechnen danach wie gewohnt weiter:

$$(3+i)\cdot(1-2i) = 3 \underbrace{-6i+i}_{=-5i} -2i^2 = 3-5i-2\cdot(-1) = 3-5i+2 = 5-5i.$$

Das Ergebnis der Rechnung lautet also $5-5i$.

Mit der folgenden Aufgabe machen Sie sich fit im Multiplizieren von komplexen Zahlen.

Aufgabe 8. Berechnen Sie für $v = 1+i$, $w = 4i$ und $z = 2-5i$ die folgenden Ausdrücke:

a) $v \cdot z$ b) $v(w-z)$ c) $\mathrm{Re}(vwz)$ d) $\mathrm{Im}(v+wz)$

e) „Wird eine komplexe Zahl mit $-i$ multipliziert, dann werden Realteil und Imaginärteil vertauscht.“ Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

A8

Nachdem Sie nun einige Beispiele gerechnet haben, soll die Multiplikation von komplexen Zahlen noch in allgemeiner Form festgehalten werden.

Aufgabe 9. Ergänzen Sie den Text im Kasten.

Sind $a+bi$ und $c+di$ zwei komplexe Zahlen (d.h. a, b, c, d reell), dann gilt

$$(a+bi)\cdot(c+di) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

A9

Leider ist die Regel für die Multiplikation nicht so einfach wie für die Addition und Subtraktion, wo Realteile und Imaginärteile separat addiert werden!

In der folgenden Aufgabe können Sie dies selbst begründen:

Aufgabe 10. Zeigen Sie: Im Allgemeinen gilt nicht $\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w)$.

A10

Wie werden komplexe Zahlen addiert bzw. subtrahiert?
Wie lautet die allgemeine Formel für die Multiplikation von komplexen Zahlen?

2.3 Konjugiert komplexe Zahlen

Bevor wir uns die Division von komplexen Zahlen genauer ansehen, führen wir einen neuen Begriff ein. Jede komplexe Zahl besitzt eine so genannte „konjugiert komplexe Zahl“. Dieser Begriff wird sich bei der Division als sehr nützlich erweisen, und er wird in späteren Kapiteln ebenfalls immer wieder von Bedeutung sein.

Als Beispiel betrachten wir die Zahl $5 + 3i$. Die zu $5 + 3i$ konjugiert komplexe Zahl ist $5 - 3i$. Die Realteile der beiden Zahlen sind gleich, die Imaginärteile der beiden Zahlen sind entgegengesetzt gleich, d.h. sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

Überraschend ist nun das Produkt der beiden Zahlen. Es gilt nämlich

$$(5 + 3i) \cdot (5 - 3i) = 25 - 15i + 15i - 9i^2 = 25 + 9 = 34.$$

(Dies kann man auch mit Hilfe der dritten Binomischen Formel einsehen, denn es ist $(5 + 3i) \cdot (5 - 3i) = 25 - 9i^2 = 25 + 9 = 34.$)

Das Produkt der beiden konjugiert komplexen Zahlen ist reell! Dies ist die bedeutendste Eigenschaft konjugiert komplexer Zahlen und wird sich immer wieder als nützlich erweisen.

Allgemein legen wir fest:

> Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Die zu z **konjugiert komplexe Zahl** ist die Zahl $a - bi$. Man schreibt dafür auch $\overline{z} = a - bi$.
> (Lesen Sie für $\overline{z}$: „z quer“.)

Im vorhergehenden Beispiel gilt also: $\overline{5 + 3i} = 5 - 3i$.

Aufgabe 11 gibt Ihnen Gelegenheit, selbst einige konjugiert komplexe Zahlen zu bestimmen.

Aufgabe 11. Berechnen Sie für $w = 3i$ und $z = \frac{1}{2} + 4i$:

a) $\overline{z}$ b) $\overline{w}$ c) $\overline{w + z}$ d) $\overline{w^2 - z}$

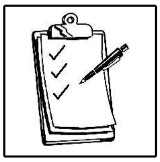
(Hinweis: $\overline{w + z}$ bedeutet, zuerst die Summe $w + z$ berechnen, anschließend die konjugiert komplexe Zahl der Summe bilden.)

Leiten Sie nun selbst bedeutende Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen her:

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen z gilt:

a) $z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ b) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ c) $\overline{\overline{z}} = z$

Wie lautet die allgemeine Formel für die Multiplikation von komplexen Zahlen?
Was versteht man unter einer konjugiert komplexen Zahl?



2.4 Division

Wir wenden uns nun dem Dividieren von komplexen Zahlen zu. Beispielsweise möchten wir die Zahl $3+i$ durch die Zahl $1-2i$ teilen. Gesucht ist also

$$(3+i):(1-2i)=\frac{3+i}{1-2i}.$$

Nach dem Permanenzprinzip sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ weiterhin gültig sein. Wie kann uns das Permanenzprinzip hier weiterhelfen?

Zunächst einmal stört uns, dass im Nenner des Bruchs i vorkommt. Durch eine *reelle* Zahl, z.B. 5 zu teilen wäre nämlich ganz einfach:

$$(3+i):5=\frac{1}{5}\cdot(3+i)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i.$$

Wie lässt sich aus dem Nenner $1-2i$ eine reelle Zahl herstellen? Richtig, hier kommt die konjugiert komplexe Zahl ins Spiel.

Wir benutzen die Tatsache, dass eine Zahl mal ihr konjugiert Komplexes eine reelle Zahl ergibt. Wir erweitern also den Bruch mit der zu $1-2i$ konjugiert komplexen Zahl $1+2i$. Dadurch wird der Nenner reell; das i verschwindet. Im Zähler entsteht zwar ein Produkt von komplexen Zahlen, das Sie aber durch Multiplizieren leicht berechnen können.

Das Vorgehen bei der Division sieht also so aus:

$$\begin{aligned}(3+i):(1-2i)&=\frac{3+i}{1-2i}=\frac{(3+i)\boldsymbol{(1+2i)}}{(1-2i)\boldsymbol{(1+2i)}}=\frac{3+6i+i-2}{1+2i-2i+4}\\&=\frac{1+7i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i.\end{aligned}$$

Das Ergebnis der Rechnung lautet somit $\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$.

Beachten Sie: Der Bruch wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert, und nicht mit jener des Zählers!

Erwerben Sie mit der folgenden Aufgabe die nötige Sicherheit beim Dividieren zweier komplexer Zahlen:

Aufgabe 13. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\dfrac{3+2i}{7-i}$ b) $\dfrac{i}{-4-4i}$ c) $\dfrac{1}{i}$ d) $\dfrac{3+4i}{-i}$

Keine Angst, die folgende Formel müssen Sie nicht auswendig lernen. Wichtig ist, dass Sie die Vorgehensweise bei der Division beherrschen. Trotzdem ist es illustrativ, die Division zweier komplexer Zahlen noch in allgemeiner Form auszurechnen.

Aufgabe 14. Ergänzen Sie den Text im Kasten.

Sind $a+bi$ und $c+di$ zwei komplexe Zahlen (d.h. a, b, c, d reell) und $c+di \neq 0$, dann gilt

$$(a+bi) : (c+di) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

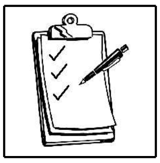
Leider ist die Regel für die Division nicht so einfach wie für die Addition und Subtraktion, wo Realteile und Imaginärteile separat addiert bzw. subtrahiert werden.

So, nun wissen Sie alles Nötige über die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen. Machen Sie sich mit Aufgabe 15 fit für den Kapiteltest!

Aufgabe 15. Berechnen Sie für $v = 5i$, $w = 3-2i$ und $z = 6+4i$ die folgenden Ausdrücke:

a) $z^2 - vw$ b) $\dfrac{z-v}{z+v}$ c) $\mathrm{Re}(zw(z+v))$ d) $\overline{\left(\dfrac{vw}{z}\right)}$

e) Zeigen Sie: Sind z und w komplexe Zahlen, so gilt $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.



Wie werden komplexe Zahlen addiert bzw. subtrahiert?
Wie lautet die allgemeine Formel für die Multiplikation von komplexen Zahlen?
Was versteht man unter einer konjugiert komplexen Zahl?
Wie geht man bei der Division zweier komplexer Zahlen vor?

Lernkontrolle

Geschafft! Kapitel 2 liegt hinter Ihnen. In der Lernkontrolle A können Sie Ihr Wissen überprüfen. Die Lösungen dazu finden Sie im Lösungsteil ganz am Ende des Leitprogramms.

Wenn Sie alle Aufgaben aus Lernkontrolle A erfolgreich bearbeitet haben, dann melden Sie sich für den Kapiteltest an.

Haben Sie bei der Bearbeitung von Lernkontrolle A Schwierigkeiten gehabt? Wenn es sich nur um Rechenfehler handelt, können Sie sich trotzdem zum Kapiteltest anmelden. Wenn es sich um Verständnisschwierigkeiten handelt, sollten Sie die entsprechenden Abschnitte noch einmal gründlicher ansehen.

Lernkontrolle A:

a) Berechnen Sie für $w = 1 + 4i$ und $z = 3 - 3i$ die folgenden Ausdrücke: $w + z$, $w - z$, $w \cdot z$, $w : z$. Berechnen Sie ferner $\frac{1}{-i}$.

b) Geben Sie $\overline{\sqrt{2} - \frac{1}{3}i}$ und $\overline{4}$ an.

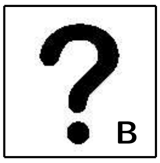
c) Für welche komplexe Zahl z gilt: $1 + i + \frac{1}{z} = 2 + 3i$?

d) „Für alle komplexen Zahlen w und z gilt $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hat es geklappt? Melden Sie sich zum Kapiteltest an!

Bearbeiten Sie Lernkontrolle B, wenn Sie den Kapiteltest nicht bestanden haben.

Lernkontrolle B:



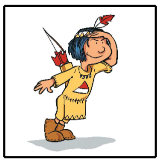
a) Berechnen Sie für $w = 1 + i$ und $z = \sqrt{2}i$ die folgenden Ausdrücke: $w + z$, $w - z$, $w \cdot z$, $w : z$. Berechnen Sie ferner $\frac{1}{i^5}$.

b) Geben Sie $\overline{4i}$ und $\overline{0}$ an.

c) Schreiben Sie 7 als Produkt zweier rein imaginärer Zahlen.

d) „Für alle komplexen Zahlen z gilt $\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z)$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

3 Alle quadratischen Gleichungen sind lösbar!



In diesem Kapitel lernen Sie eine erste wichtige Anwendung der komplexen Zahlen kennen: Im Bereich der komplexen Zahlen sind *alle* quadratischen Gleichungen lösbar!

Dies ist eine verblüffende Tatsache. Wir haben mit der Definition von i die Lösbarkeit *einer* quadratischen Gleichung gefordert, nämlich $x^2 = -1$. Nun zeigt sich, dass damit *alle* quadratischen Gleichungen lösbar sind. So ist das häufig in der Mathematik: Ein kleiner Schritt hat eine große Wirkung.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt lernen Sie einige einfache quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen kennen.

Im zweiten Abschnitt wird das Verfahren des quadratischen Ergänzens im komplexen Fall vorgestellt.

Im dritten Abschnitt wird mit Hilfe von quadratischem Ergänzen die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen hergeleitet.
Dieser Abschnitt wird der bislang theoretisch anspruchsvollste. Es kommen keine neuen Begriffe dazu, aber dafür wird das gesamte Wissen aus den beiden ersten Kapiteln eingesetzt, um auf quadratische Gleichungen loszugehen. Das erfordert ein wenig Arbeit. Gleichzeitig erleben Sie aber, wie mächtig der Bereich der komplexen Zahlen ist. Und wenn Sie den Gipfel erst einmal erreicht haben, können Sie von dort oben einen schönen Ausblick genießen!

Wie geht es nun weiter?
Beachten Sie die Lernziele. Dann können Sie mit dem ersten Abschnitt loslegen.

Lernziele:
Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben,

- können Sie die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen auswendig wiedergeben.
- können Sie die komplexen Lösungen von quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel bestimmen.
- wissen Sie, dass die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung entweder reell oder zueinander konjugiert komplex sind.

3.1 Beispiele für quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen

Zu Beginn des Leitprogramms sind wir von der Gleichung $x^2 = -1$ ausgegangen. Diese quadratische Gleichung ist im Zahlbereich $\mathbb{R}$ nicht lösbar - wohl aber im Zahlbereich $\mathbb{C}$, wie Sie jetzt wissen! Die Gleichung $z^2 = -1$ besitzt die komplexe Lösung $z = i$. (Wir schreiben für die Unbekannte nun z statt x, um anzudeuten, dass wir auch Lösungen in $\mathbb{C}$ zulassen wollen.) Offensichtlich ist aber auch $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Also ist $-i$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung $z^2 = -1$.

Wir halten fest: Die quadratische Gleichung $z^2 = -1$ besitzt zwei Lösungen, nämlich die beiden konjugiert komplexen Zahlen $z_1 = i$ und $z_2 = -i$.

Weitere Lösungen sind nicht möglich: $z^2 = -1$ ist äquivalent zu der Gleichung $z^2 - (-1) = 0$, und es gilt $0 = z^2 - (-1) = z^2 - i^2 = (z - i)(z + i)$, wobei im letzten Schritt die dritte binomische Formel benutzt wurde. Ein Produkt ist aber nur genau dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Also gibt es nur die beiden Lösungen $z_1 = i$ und $z_2 = -i$.

Wie gehen wir nun bei der Gleichung $z^2 = -2$ vor? Ganz einfach, wir schreiben $z^2 = 2 \cdot (-1)$ und finden die beiden konjugiert komplexen Lösungen $z_1 = \sqrt{2}i$ und $z_2 = -\sqrt{2}i$.

Die Gleichung $z^2 = -2 = 2 \cdot (-1)$ ist nämlich äquivalent zu der Gleichung $\frac{z^2}{2} = \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$ mit den beiden Lösungen $\frac{z_1}{\sqrt{2}} = i$ und $\frac{z_2}{\sqrt{2}} = -i$, also $z_1 = \sqrt{2}i$ und $z_2 = -\sqrt{2}i$.

So, jetzt wissen Sie bereits alles, um erste quadratische Gleichungen selbst zu lösen.

A16

Aufgabe 16. Geben Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen an:

a) $z^2 = -4$ b) $z^2 + 3 = 0$ c) $6z^2 = 15$ d) $z^3 = -8z$

(In Teilaufgabe (d) kommt eine Gleichung „dritten Grades“ vor. Das heißt, die höchste Potenz der Unbekannten z ist z^3, die dritte Potenz.)

3.2 Quadratisches Ergänzen

Im vorigen Abschnitt haben wir quadratische Gleichungen betrachtet, in denen z nur als z^2 vorkam. Wir konnten sie leicht lösen, indem wir sie auf die Form „$(\ldots)^2 =$ Zahl“ gebracht haben.

Im Allgemeinen ist eine quadratische Gleichung aber von der Form $az^2+bz+c=0$ mit a, b, c reell und $a \neq 0$. Wie lässt sich eine solche Gleichung lösen?

Als Beispiel sehen wir uns die folgende quadratische Gleichung an:

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Lässt sich diese Gleichung auch auf die soeben behandelte Form „$(\ldots)^2 =$ Zahl“ bringen? Denn dann können wir versuchen, unsere Lösungsmethode aus dem vorigen Abschnitt auf diese Gleichung anzuwenden.

Um die linke Seite der Gleichung als Quadrat zu schreiben, benutzen wir die Methode des *quadratischen Ergänzens*. In unserem Beispiel funktioniert dies wie folgt.

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - 6z + 13 = z^2 - 2 \cdot \mathbf{3}z \; \mathbf{+3^2 - 3^2} + 13 = (z - \mathbf{3})^2 - 9 + 13 \\ &= (z-3)^2 + 4. \end{aligned}$$

Der Summand $-6z$ wird als Produkt $-2 \cdot 3z$ in der zweiten binomischen Formel aufgefasst und durch quadratisches Ergänzen $+\,3^2 - 3^2$ der quadratische Term $(z-3)^2$ erzeugt.

Die Gleichung $z^2-6z+13=0$ ist somit äquivalent zur Gleichung $(z-3)^2+4=0$. Auf den ersten Blick sieht die umgeformte Gleichung viel komplizierter aus als zuvor, aber bei näherer Betrachtung lässt sie sich wie die im vorigen Abschnitt behandelten Gleichungen lösen. Versuchen Sie's!

A 17

Aufgabe 17. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $(z-3)^2 + 4 = 0$.

Die Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$ besitzt also die beiden (konjugiert komplexen) Lösungen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3 - 2i$.

Das war eigentlich gar nicht so schwierig. Und das Beste kommt noch: Dieses Vorgehen lässt sich auf die allgemeine quadratische Gleichung übertragen! Im nächsten Abschnitt erfahren Sie, wie das gemacht wird.

3.3 Die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Die allgemeine quadratische Gleichung ist von der Form

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit a, b, c reell und $a \neq 0$.

Division durch a liefert

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Wie im Abschnitt zuvor wird der Summand $\frac{b}{a}z = 2 \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}z$ als Produkt in einer binomischen Formel aufgefasst und die quadratische Ergänzung $+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ durchgeführt. Die Rechnungen sehen dabei etwas komplizierter aus als zuvor, da nun mit Variablen a, b, c anstelle von Zahlen gerechnet wird. Das Prinzip ist aber ganz das alte. Man erhält

$$\begin{aligned}
0 &= z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = z^2 + 2 \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}z + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^{\boldsymbol{2}} - \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^{\boldsymbol{2}} + \frac{c}{a} \\
&= \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a \cdot a} \\
&= \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ ist somit äquivalent zu der Gleichung

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}.$$

Diese Gleichung ist wieder von der Form „$(\ldots)^2 =$ Zahl“, wobei die Zahl auf der rechten Seite positiv oder negativ sein kann.

Ob der Ausdruck $\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$, also die Zahl auf der rechten Seite, positiv oder negativ ist, hängt nur davon ab, ob $b^2 - 4ac$ positiv oder negativ ist, denn der Nenner $(2a)^2$ ist stets positiv. Man nennt den Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ daher auch die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung (von lateinisch *discriminare* = unterscheiden, trennen). Wie wir sehen werden, hängt es nämlich vom Vorzeichen der Diskriminante ab, ob die quadratische Gleichung reelle oder nicht reelle Lösungen besitzt.

Wir schreiben nun kurz $D = b^2 - 4ac$, d.h. wir wollen die Gleichung

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{(2a)^2}$$

lösen. Dazu suchen wir eine Zahl w, für die $w^2 = D$ gilt. Nach dem vorigen Abschnitt wissen wir, dass immer eine solche Zahl existiert!

Ist zum Beispiel $D = 2$, so ist $w = \sqrt{2}$ eine solche Zahl, denn es ist $(\sqrt{2})^2 = 2$. Ist zum Beispiel $D = -2$, so ist $w = \sqrt{2}i$ eine solche Zahl, denn es ist $(\sqrt{2}i)^2 = -2$. Natürlich ist dann stets auch $(-w)^2 = w^2 = D$.

Für die Gleichung $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{(2a)^2}$ führt dies deshalb auf die beiden Lösungen $z_1 + \frac{b}{2a} = \frac{w}{2a}$ und $z_2 + \frac{b}{2a} = \frac{-w}{2a}$, also auf $z_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{w}{2a}$ und $z_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{w}{2a}$.
Wir schreiben die beiden Lösungen auch kurz als

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2a}.$$

Nun können Sie aufatmen. Den schwierigsten Teil des Kapitels haben Sie hinter sich gebracht! Bevor Sie die Vorgehensweise noch einmal an einem Beispiel durchspielen, kommen allerdings noch zwei Bemerkungen:

1. Ist $D = b^2 - 4ac > 0$, also die Diskriminante positiv, dann ist w eine reelle Zahl. Damit sind auch die beiden Lösungen $z_{1,2} = \frac{-b\pm w}{2a}$ reell. (Beachten Sie, dass a und b reelle Zahlen sind!)
2. Ist $D = b^2 - 4ac < 0$, also die Diskriminante negativ, dann ist w rein imaginär. Damit sind die beiden Lösungen $z_{1,2} = \frac{-b\pm w}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{w}{2a}$ konjugiert komplex zueinander. (z_1 und z_2 besitzen den gleichen Realteil, aber Imaginärteile mit entgegengesetzten Vorzeichen.)

Aufgabe 18. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2 + \frac{1}{2}z + 3 = 0$. Gehen Sie dabei wie im allgemeinen Fall vor:

- Überlegen Sie, was a, b und c in diesem Fall sind.
  Tipp: Die Rechnung wird einfacher, wenn Sie die Gleichung zunächst mit 2 multiplizieren, um den Bruch loszuwerden!
- Berechnen Sie die Diskriminante D der Gleichung.
- Finden Sie eine Zahl w mit $w^2 = D$.
- Geben Sie die Lösungen $z_1 = \frac{-b+w}{2a}$ und $z_2 = \frac{-b-w}{2a}$ an.

Wir halten die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen noch einmal fest:

Die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit a, b, c reell und $a \neq 0$ hat die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2a}.$$

wobei w eine komplexe Zahl mit $w^2 = D = b^2 - 4ac$ ist.

Je nach Vorzeichen der Diskiminante D lauten die Lösungen folgendermaßen:
Ist $D > 0$, dann sind z_1, z_2 reell.
Ist $D = 0$, dann ist $z_1 = z_2$ reell.
Ist $D < 0$, dann sind z_1 und z_2 zueinander konjugiert komplex.

Damit haben Sie nun eine Formel bei der Hand, um quadratische Gleichungen zu lösen. Diese Lösungsformel ist eine Verallgemeinerung der Ihnen bereits bekannten Auflösungsformel für quadratische Gleichungen im Reellen. Wenden Sie sie bei der folgenden Aufgabe gleich an!

A19

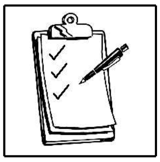
Aufgabe 19. Finden Sie mit Hilfe der Lösungsformel alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^2 - 4z + 20 = 0$ b) $\frac{4}{5}z - \frac{1}{5}z^2 = -9$ c) $2z^2 - z + 1 = 0$

d) Begründen Sie: Ist $az^2 + bz + c = 0$ eine quadratische Gleichung mit a, b, c reell, dann ist das Produkt aus den Lösungen der Gleichung reell.

e) Die Gleichung $z^2 - 2z + a = 0$ (a reell) hat die Lösung $z_1 = 1 + i$. Bestimmen Sie a und die zweite Lösung z_2.

Wie lautet die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen?
Was lässt sich mit Hilfe des Vorzeichens der Diskriminante über die Lösungen einer quadratischen Gleichung sagen?



Sie können nun alle quadratischen Gleichungen $az^2 + bz + c = 0$ mit a, b, c reell lösen. Aber das Beste kommt zum Schluss: Die obige Lösungsformel gilt nach dem Permanenzprinzip auch für quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, d.h. für Gleichungen $az^2 + bz + c = 0$ mit a, b, c komplex!

Wir führen dies an dem Beispiel

$$z^2 - z + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right) = 0$$

vor. Es ist $a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$ (nicht reell!) und damit die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 1 - 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right) = 1 - 1 + 2i = 2i$. Durch „Tüfteln" findet man die Zahl $w = 1 + i$ mit $w^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = D$. Dies führt auf die (nicht konjugiert komplexen) Lösungen

$$z_1 = \frac{-b + w}{2a} = \frac{1 + (1+i)}{2} = 1 + \frac{1}{2}i \text{ und } z_2 = \frac{-b - w}{2a} = \frac{1 - (1+i)}{2} = -\frac{i}{2}.$$

Damit haben wir unser Versprechen im Titel wahr gemacht. Alle quadratischen Gleichungen sind lösbar!

Wie man die Zahl w nicht durch Tüfteln, sondern durch Rechnung bestimmt, erfahren Sie in der Lernkontrolle A von Kapitel 5.

Lernkontrolle

Uff! Mit Kapitel 3 haben Sie einen ganz schönen Brocken Theorie bewältigt. Ob Sie ihn gut verdaut haben, können Sie mit der Lernkontrolle A prüfen. Die Lösungen dazu finden Sie wie immer im Lösungsteil ganz am Ende des Leitprogramms.

Wenn Sie in Lernkontrolle A erfolgreich waren, dann melden Sie sich für den Kapiteltest an.

Haben Sie bei der Bearbeitung von Lernkontrolle A Schwierigkeiten gehabt? Wenn es sich nur um Rechenfehler handelt, können Sie sich trotzdem zum Kapiteltest anmelden. Wenn es sich um Verständnisschwierigkeiten handelt, sollten Sie die entsprechenden Abschnitte noch einmal gründlicher ansehen.

Lernkontrolle A:

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2 + 17 = 8z$.

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 + 3z^2 - 54 = 0$.

c) „Die Gleichung $z^2 - 6z + 10 = 0$ besitzt die beiden Lösungen $3 + i$ und $4 + i$.“ Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) „Kennt man von einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten eine nicht reelle Lösung, dann kennt man auch die andere.“ Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Keine Schwierigkeiten gehabt? Dann melden Sie sich zum Kapiteltest an!

Bearbeiten Sie Lernkontrolle B, wenn Sie den Kapiteltest nicht bestanden haben.

Lernkontrolle B:

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z(z + 8) = -25$.

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 - 4z^2 + 6z = 0$.

c) „Sind w und z zwei verschiedene Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffzienten, so ist $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(z)$.“ Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Geben Sie eine möglichst einfache quadratische Gleichung mit den Lösungen $z_1 = ib$ und $z_2 = -ib$ (b reell) an.

4 Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen

Mit komplexen Zahlen kann man rechnen wie mit „gewöhnlichen“ Zahlen. Man kann mit ihnen alle quadratischen Gleichungen lösen. Aber das ist bei weitem nicht alles: Komplexe Zahlen und ihre Operationen lassen sich auch geometrisch darstellen. Mit der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen vertiefen Sie Ihr bereits gewonnenes Wissen, und Sie lernen neue Zusammenhänge kennen, die das Lösen weiterführender Fragen ermöglichen.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt werden wir jeder komplexen Zahl einen Punkt in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene zuordnen. Anschließend werden alle Ihnen vertrauten Begriffe wie z.B. Realteil, Imaginärteil, konjugiert komplexe Zahl geometrisch interpretiert.

Im zweiten Abschnitt werden wir die geometrische Bedeutung der Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen erläutern. Hier werden Sie feststellen, dass Ihnen dieses Konzept aus einem anderen Zusammenhang bereits bekannt ist.

Im dritten Abschnitt schließlich wird ein neuer Begriff eingeführt, der sich bei der Beschreibung von komplexen Zahlen in Polarform in Kapitel 5 als sehr nützlich erweisen wird. Es ist der Begriff des Betrags einer komplexen Zahl.

Wie geht es nun weiter?
Vielleicht haben Sie bereits eine Vermutung, wie man jeder komplexen Zahl einen Punkt einer Ebene zuordnen kann? Lesen Sie die Lernziele und blättern Sie schnell weiter, um Ihre Vermutung zu überprüfen!

Lernziele:
Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie

- mit eigenen Worten erklären, was die Gaußsche Zahlenebene ist.
- komplexe Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene einzeichnen, bzw. aus ihr herauslesen.
- den Betrag einer komplexen Zahl berechnen, bzw. aus der Gaußschen Zahlenebene herauslesen.

Weiter können Sie den Realteil, Imaginärteil und Betrag einer komplexen Zahl sowie die Addition, die Subtraktion und das komplex Konjugieren geometrisch interpretieren.

4.1 Die Gaußsche Zahlenebene

Wir haben komplexe Zahlen definiert als Zahlen der Form

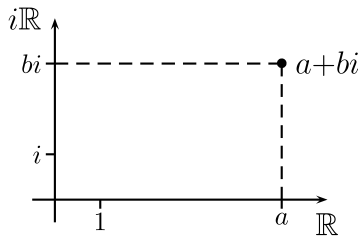
$$z = a + bi,$$

wobei i die imaginäre Einheit ist und a und b reelle Zahlen sind.

Jede komplexe Zahl z ist also durch ein reelles Zahlenpaar (a, b) eindeutig festgelegt, und umgekehrt gehört zu jeder komplexen Zahl z ein reelles Zahlenpaar (a, b).

Daher liegt es nahe, die geometrische Darstellung komplexer Zahlen wie folgt festzulegen:

Jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ wird der Punkt (a, b) in der Zahlenebene zugeordnet. Diese Ebene heißt **Gaußsche Zahlenebene**.
Die waagerechte Achse nennen wir **reelle Achse**. Sie wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Die senkrechte Achse heißt **imaginäre Achse** und wird mit $i\mathbb{R}$ bezeichnet.
Der Koordinatenursprung heißt **Nullpunkt**.



Die komplexe Ebene wird zu Ehren von Karl Friedrich Gauss (1777-1855) „Gaußsche Zahlenebene“ genannt. Erst K.F. Gauß verhalf der Veranschaulichung dieser früher unvorstellbaren Zahlen zum Durchbruch und verschaffte ihnen bei Mathematikerinnen und Mathematikern volle Anerkennung.

Offensichtlich entspricht die reelle Achse allen reellen Zahlen (also dem ursprünglichen Zahlenstrahl) und die imaginäre Achse allen rein imaginären Zahlen. So liegt zum Beispiel die Zahl 1 eine Einheit rechts des Nullpunkts auf der reellen Achse und die Zahl i eine Einheit oberhalb des Nullpunkts auf der imaginären Achse.

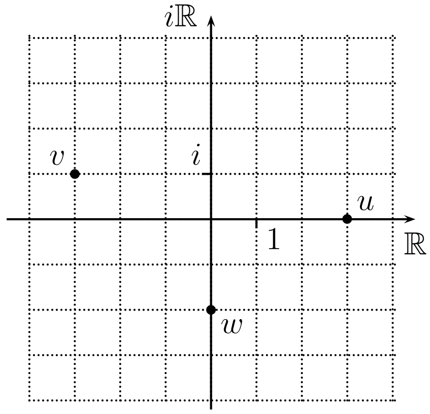
Machen Sie sich mit der Gaußschen Zahlenebene vertraut, indem Sie die folgende Aufgabe lösen:

A20

Aufgabe 20. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene ein, die nachfolgend abgebildet ist:

a) $3i$ b) $-2-i$ c) z mit $\mathrm{Re}(z) = 3, \mathrm{Im}(z) = 2$ d) $3-2i$

e) Wie lauten die dargestellten Zahlen u, v, w?



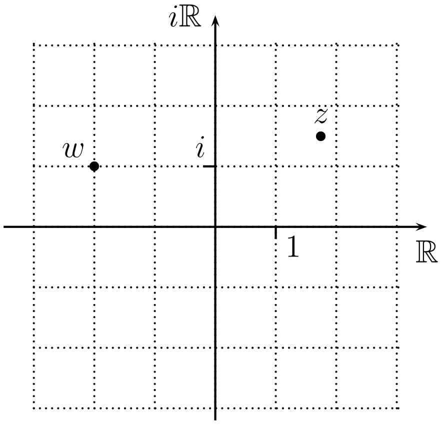
Zu einer komplexen Zahl z kann man die zu ihr entgegengesetzte Zahl $-z$, bzw. die zu ihr konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ bilden. Leiten Sie selbst die entsprechenden geometrischen Interpretationen her:

A 21

Aufgabe 21. Sei $w = -2 + i$, $z = a + bi$ (a, b reell).

a) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen $-w$, $-z$, $\overline{w}$ und $\overline{z}$ ein.

b) Welche geometrische Abbildung in der Gaußschen Zahlenebene entspricht dem Bilden der entgegengesetzten Zahl, bzw. dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl?

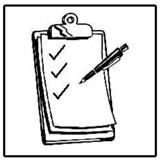


Die entgegengesetzte Zahl $-w$ zu w, bzw. die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ zu z spielt beim Lösen von quadratischen Gleichungen eine wichtige Rolle. Mit w ist stets auch $-w$ eine Lösung von $w^2 = D$, auch wenn die Diskriminante D nicht reell ist. Denn es ist $(-w)^2 = w^2 = D$. Ist z eine nicht reelle Lösung der quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, dann ist stets auch $\overline{z}$ eine Lösung dieser Gleichung. Dies geht aus der Lösungsformel hervor. Merken Sie sich: Nicht reelle Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten liegen in der Gaußschen Zahlenebene symmetrisch bezüglich der reellen Achse.

Wir halten die obigen geometrischen Interpretationen noch in einem Kasten fest:

!

Dem Bilden der entgegengesetzten Zahl entspricht in der Gaußschen Zahlenebene eine Spiegelung am Nullpunkt.
Dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl entspricht in der Gaußschen Zahlenebene eine Achsenspiegelung an der reellen Achse.



Wie werden komplexe Zahlen geometrisch dargestellt?
Welche Abbildung entspricht dem Bilden der entgegengesetzten Zahl?
Welche Abbildung entspricht dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl?

Lösen Sie die folgende Aufgabe, um den Umgang mit der Gaußschen Zahlenebene zu vertiefen:

A22

Aufgabe 22. Zeichnen Sie zu jeder Teilaufgabe eine Gaußsche Zahlenebene (achten Sie auf eine korrekte Beschriftung) und markieren Sie die Menge aller Punkte z, für die gilt:

a) $\mathrm{Re}(z) \leq 3$ und $\mathrm{Im}(z) > 2$ b) $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq 1$ c) $z = \overline{z}$

4.2 Die Addition in der Gaußschen Zahlenebene

Sind $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ zwei komplexe Zahlen, dann gilt

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Komplexe Zahlen werden addiert, indem man die Realteile und die Imaginärteile separat addiert.

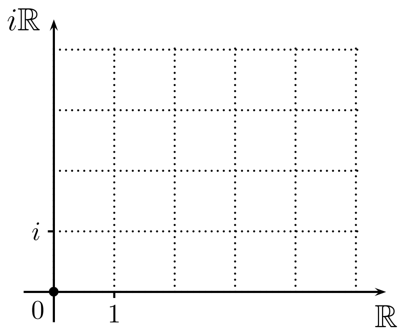
Die geometrische Interpretation der Addition in der Gaußschen Zahlenebene ist Ihnen bereits aus einem anderen Zusammenhang vertraut. Lösen Sie Aufgabe 23, um Ihre - vielleicht vorhandene - Vermutung zu bestätigen.

A23

Aufgabe 23. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 1 + 2i$.

a) Zeichnen Sie z_1, z_2 und $z_1 + z_2$ ein und verbinden Sie die entsprechenden Punkte jeweils mit dem Nullpunkt.

b) Interpretieren Sie das Addieren von z_1 und z_2 geometrisch. (Tipp: Die Punkte zu 0, z_1, z_2 und $z_1 + z_2$ bilden ein Parallelogramm.)



Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ ist eindeutig festgelegt durch ein Zahlenpaar (a, b), bzw. geometrisch durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene. Jedem Zahlenpaar (a, b) lässt sich aber eindeutig der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zuordnen. Wir können also jeder komplexen Zahl eindeutig einen Vektor in der Gaußschen Zahlenebene zuordnen. Dieser Vektor kann dargestellt werden durch den Pfeil mit dem Anfangspunkt 0 und dem Endpunkt z.

Der Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ entspricht in der Gaußschen Zahlenebene die Vektoraddition der zugehörigen Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Denn Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten separat addiert. Die erste Komponente entspricht dem Realteil, die zweite dem Imaginärteil.

Genauso können wir die Subtraktion zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 geometrisch interpretieren. Auch hier gilt nämlich: Komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man die Realteile und Imaginärteile separat subtrahiert - genau wie bei der Subtraktion von Vektoren.

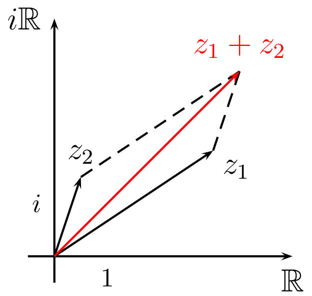
Die Subtraktion der Vektoren zu z_1 und z_2 wird in der Praxis so konstruiert, dass man zum Vektor zu z_1 den zu z_2 entgegengesetzten Vektor, d.h. den Vektor zu $-z_2$, addiert. Denn es ist $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Wir fassen diese Ergebnisse in dem folgenden Kasten zusammen:

Die folgenden Rechenoperationen von komplexen Zahlen z_1 und z_2 kann man vektoriell interpretieren:

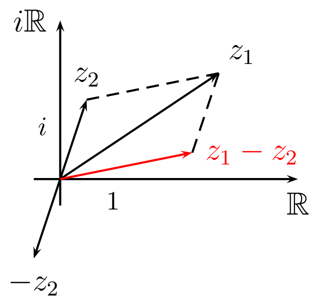
Addition

$z_1 + z_2$



Subtraktion

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$



Die Differenz $z_1 - z_2$ kann auch als Pfeil dargestellt werden mit dem Anfangspunkt z_2 und dem Endpunkt z_1.

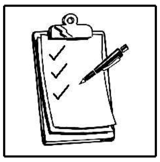
Beachten Sie: Die Differenz $z_1 - z_2$ kann sowohl durch den Pfeil von 0 zu $z_1 - z_2$ als auch durch den Pfeil von z_2 zu z_1 dargestellt werden. Ist beispielsweise $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, dann ist $z_1 - z_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$. In diesem Fall lässt sich $z_1 - z_2$ sowohl durch den Vektor zu $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ als auch durch den Pfeil von $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ zu $3 + 2i$ darstellen. Je nachdem ist die eine oder andere Darstellung von Vorteil.

In der folgenden Aufgabe können Sie Ihre neuen Kenntnisse anwenden.

A24

Aufgabe 24. Es sei z eine beliebige komplexe Zahl. Begründen Sie mit Hilfe einer Skizze und der geometrischen Interpretation der Addition die Formeln

a) $\dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ b) $\dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \mathrm{Im}(z)$

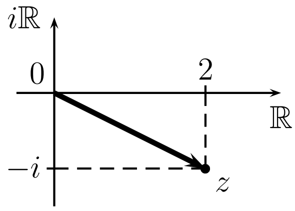


Wie werden komplexe Zahlen geometrisch dargestellt?
Welche Abbildung entspricht dem Bilden der entgegengesetzten Zahl?
Welche Abbildung entspricht dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl?
Wie werden komplexe Zahlen geometrisch addiert, bzw. subtrahiert?
Wie kann die Differenz $z_1 - z_2$ zweier Zahlen z_1, z_2 dargestellt werden?

4.3 Der Betrag einer komplexen Zahl

Wie wir gesehen haben, lässt sich jeder komplexen Zahl z eindeutig ein Vektor in der Gaußschen Zahlenebene zuordnen. Auch die Länge des Vektors hat eine Entsprechung bei den komplexen Zahlen. Man spricht vom „Betrag“, in Zeichen $|z|$, der komplexen Zahl z. Dieser Begriff spielt im Folgenden eine zentrale Rolle.

Als Beispiel betrachten wir die Zahl $z = 2 - i$.



Die Länge $|z|$ des zugehörigen Vektors, d.h. der Abstand des Punktes $2 - i$ zum Nullpunkt, ist nach dem Satz von Pythagoras

$$|z| = |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

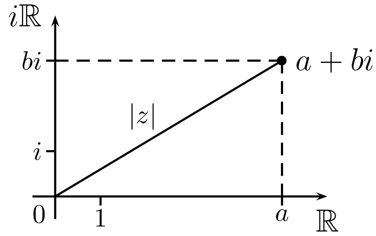
Überdies gilt: $z \cdot \overline{z} = (2-i)(2+i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 + 1 = 5 = |z|^2$, also $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Allgemein legen wir fest:

Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Die Länge des zugehörigen Vektors nennt man den **Betrag** der komplexen Zahl z. Man schreibt $|z|$.

Es ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \geq 0.$$

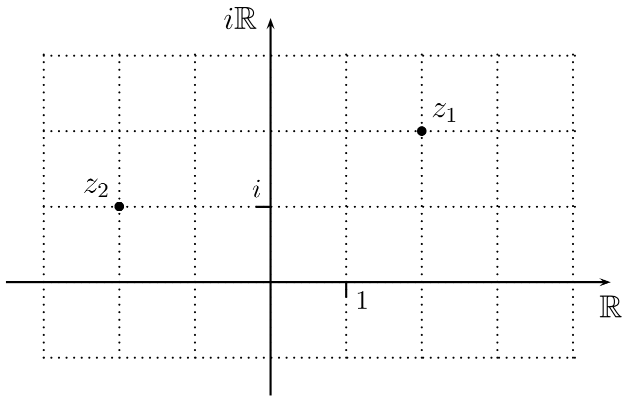


Beachten Sie: Liegt z auf der reellen Achse, stimmt der Betrag der komplexen Zahl mit der Definition des Absolutbetrags für reelle Zahlen überein. Das Permanenzprinzip ist erfüllt.

Bearbeiten Sie Aufgabe 25, um sich mit dem neuen Begriff vertraut zu machen.

Aufgabe 25.

a) Bestimmen Sie $|z_1|$, $|z_2|$ und $|z_1 - z_2|$.



b) Berechnen Sie $|-\pi|$, $|i|$ und $|-3-4i|$.

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, lässt sich die Differenz $z_1 - z_2$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 als Pfeil von z_2 nach z_1 darstellen. In der obigen Aufgabe bedeutet somit $|z_1 - z_2|$ den Abstand der beiden Punkte z_2, z_1. $|z_1 - z_2|$ lässt sich deshalb direkt aus der Zeichnung herauslesen:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

Wir halten fest:

> Der Ausdruck $|z_1 - z_2|$ kann geometrisch als Abstand der Punkte z_1 und z_2 interpretiert werden.

Nutzen Sie diese Erkenntnis in der nächsten Aufgabe.

Aufgabe 26. Zeichnen Sie eine Gaußsche Zahlenebene (achten Sie auf eine korrekte Beschriftung) und markieren Sie in verschiedenen Farben die Menge aller Punkte z, für die gilt:

a) $|z| = 1$ b) $|z - (1 + i)| = 1$ c) $|z - 1| = |z - 3|$

(Hinweis zu (c): Interpretieren Sie die linke und die rechte Seite der Gleichung geometrisch.)

Beachten Sie: Auch Ausdrücke wie $|z + 1 + i|$ lassen sich als Betrag einer Differenz interpretieren. Es ist $|z + 1 + i| = |z - (-1 - i)|$, also der Abstand des Punkts z vom Punkt $-1 - i$. Damit ist die Menge aller Punkte z, für die $|z + 1 + i| = 2$ gilt, die Menge aller Punkte z in der Gaußschen Zahlenebene, die von dem Punkt $-1 - i$ den Abstand 2 haben. Das ist aber nichts anderes als ein Kreis in der Gaußschen Zahlenebene mit Mittelpunkt $-1-i$ und Radius 2!

Wir halten fest:

> $|z - m| = r$ (m komplex, r positiv, z eine komplexe Variable) ist die Gleichung eines Kreises mit Radius r und Mittelpunkt m in der Gaußschen Zahlenebene.

Wie werden komplexe Zahlen geometrisch addiert, bzw. subtrahiert?
Wie kann die Differenz $z_1 - z_2$ zweier Zahlen z_1, z_2 dargestellt werden?
Was versteht man unter dem Betrag einer komplexen Zahl?
Wie kann der Betrag einer komplexen Zahl berechnet werden?
Wie kann $|z_1 - z_2|$ geometrisch interpretiert werden?

Lernkontrolle

Sie haben das vierte Kapitel durchgearbeitet? Dann testen Sie sich mit der Lernkontrolle A. Die Lösungen dazu finden Sie im Lösungsteil ganz am Ende des Leitprogramms.

Wenn Sie alle Aufgaben aus Lernkontrolle A erfolgreich bearbeitet haben, dann melden Sie sich für den Kapiteltest an.

Lernkontrolle A:

a) Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in eine Gaußsche Zahlenebene ein. (Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung.)

$$w = -\frac{3}{2} + 2i, \qquad z = -2 - 2i.$$

Berechnen Sie ferner $|w|$, $|z|$ und $|w - z|$.

b) Welche geometrische Abbildung in der Gaußschen Zahlenebene entspricht der folgenden Vorschrift: Zu jeder komplexen Zahl z wird $-1 + i$ hinzuaddiert.

c) Markieren Sie in verschiedenen Farben in einer Gaußschen Zahlenebene die Menge aller Punkte z, für die gilt:

$$z = -\overline{z}, \qquad \mathrm{Re}(z) = |z|, \qquad |z - 2 - 2i| \leq 3.$$

Hat es geklappt? Melden Sie sich zum Kapiteltest an.

Bearbeiten Sie die Lernkontrolle B, wenn Sie den Kapiteltest nicht bestanden haben.

Lernkontrolle B:

a) Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in eine Gaußsche Zahlenebene ein. (Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung.)

$$w = 2 + 4i, \qquad z = 3 - \frac{1}{2}i.$$

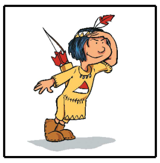
Berechnen Sie ferner $|w|$, $|z|$ und $|w - z|$.

b) Welche geometrische Abbildung in der Gaußschen Zahlenebene entspricht der folgenden Vorschrift: Zu jeder komplexen Zahl z wird $-\overline{z}$ gebildet.

c) Markieren Sie in verschiedenen Farben in einer Gaußschen Zahlenebene die Menge aller Punkte z, für die gilt:

$$\mathrm{Im}(z) = |z|, \qquad |z| = |z - 2 - 2i|.$$

5 Die Polarform komplexer Zahlen



Im letzten Kapitel haben Sie gelernt, wie man komplexe Zahlen geometrisch darstellen kann. Durch diese Betrachtungsweise erhielten viele Begriffe eine geometrische Bedeutung.

In diesem Kapitel lernen Sie eine zweite Darstellungsform für komplexe Zahlen kennen. Mit Hilfe dieser neuen Darstellungsform erhalten auch die Multiplikation und Division eine geometrische Bedeutung. Dies ermöglicht eine elegante Beschreibung von geometrischen Abbildungen.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt werden wir jeder komplexen Zahl einen Zeiger zuordnen. Ein solcher Zeiger ist eindeutig festgelegt durch die Angabe seiner Länge und seines Winkels. Dies führt auf die Beschreibung von komplexen Zahlen mit Hilfe von Länge und Winkel, der so genannten *Polarform*. Die ursprüngliche Beschreibung anhand von Realteil und Imaginärteil wird als *Normalform* bezeichnet.

Im zweiten Abschnitt erfahren Sie, wie man Polarform und Normalform ineinander umrechnet. Oft geschieht dies am einfachsten anhand einer Zeichnung.

Im dritten Abschnitt lernen Sie, wie komplexe Zahlen in Polarform multipliziert und dividiert werden. Dies führt auf die geometrische Bedeutung der Multiplikation und Division und zu einer eleganten Beschreibung von geometrischen Abbildungen.

Der vierte Abschnitt ist als Ergänzung zu verstehen. Der Inhalt ist etwas anspruchsvoller und wird auch nicht im Kapiteltest abgefragt. Dafür erfahren Sie dort etwas über die „schönste Formel der Mathematik“.

Wie geht es nun weiter?
Beachten Sie die Lernziele, bevor Sie mit dem ersten Abschnitt loslegen.

Lernziele:
Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, können Sie

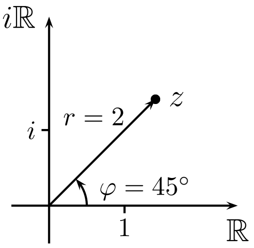
- in eigenen Worten erklären, was die Polarform einer komplexen Zahl ist.
- das Argument einer komplexen Zahl bestimmen.
- die Polar- und Normalform von komplexen Zahlen ineinander umrechnen.
- komplexe Zahlen in Polarform multiplizieren und dividieren.
- die Multiplikation und Division geometrisch interpretieren.

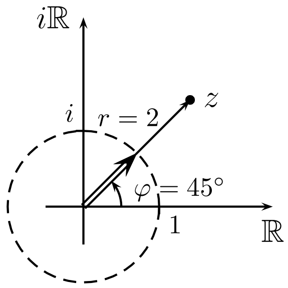
5.1 Die Darstellung in Polarform

Wie wir gesehen haben, lässt sich jede komplexe Zahl z in der Gaußschen Zahlenebene als Vektor darstellen. Dieser Vektor ist durch die Angabe des Realteils und des Imaginärteils der komplexen Zahl z eindeutig festgelegt.

Ein solcher vom Nullpunkt ausgehender Vektor lässt sich aber auch als Zeiger auffassen. Dieser Zeiger ist eindeutig festgelegt durch die Zeigerlänge r und den Winkel φ, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse einschließt.

Als Beispiel betrachten wir den Zeiger mit der Länge $r = 2$ und dem Winkel $\varphi = 45°$ (Abbildung links):





Dieser Zeiger besitzt 2-mal die Länge des zugehörigen Einheitszeigers. Der zugehörige Einheitszeiger ist in der Abbildung rechts durch einen Doppelpfeil dargestellt. Er hat die Länge 1 und schließt mit der positiven reellen Achse den gleichen Winkel wie z ein, also in unserem Beispiel $\varphi = 45°$.

Für die komplexe Zahl z, die dem Zeiger mit der Länge $r = 2$ und dem Winkel $\varphi = 45°$ entspricht, schreiben wir

$$z = 2 \cdot e^{i\,45°} \qquad („\mathbf{2}\text{-mal } \mathbf{e}^{\mathbf{i}}\text{nheitszeiger mit Winkel } \mathbf{45°}“).$$

$e^{i\,45°}$ ist im Moment noch als reine Schreibweise aufzufassen. Erst später werden wir diesen Ausdruck als „e hoch i mal $45°$“ interpretieren.

Positive Winkel werden im Gegenuhrzeigersinn gemessen (also im „mathematisch positiven Umlaufsinn“), negative Winkel im Uhrzeigersinn. Es ist dabei üblich, die Winkel im Bogenmaß anzugeben.

Die folgende Tabelle ruft Ihnen die wichtigsten Winkel im Grad- und Bogenmaß in Erinnerung und gibt Ihnen die entsprechenden Umrechnungsformeln an:

Winkelmaß	Spezielle Werte							Umrechnungsformeln	
Gradmaß	$0°$	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	α	$\widehat{\alpha} \cdot \frac{360°}{2\pi}$
Bogenmaß	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\alpha \cdot \frac{2\pi}{360°}$	$\widehat{\alpha}$

Im obigen Beispiel gilt also: $z = 2 \cdot e^{i\,45^\circ} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
Den letzten Ausdruck kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und der Skizze nachprüfen.

Bearbeiten Sie nun die folgende Aufgabe:

Aufgabe 27. Zeichnen Sie jeweils den entsprechenden Zeiger in eine Gaußsche Zahlenebene ein und bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung die zugehörige komplexe Zahl.

a) $z_1 = 3 \cdot e^{i\pi}$ b) $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$ c) $z_3 = 2 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

d) $z_4 = 3 \cdot e^{i3\pi}$ e) $z_5 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$

In der obigen Aufgabe haben Sie festgestellt, dass die Winkel $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$ denselben Zeiger ergeben. Ebenso π und $3\pi = \pi + 2\pi$. Allgemein gilt:

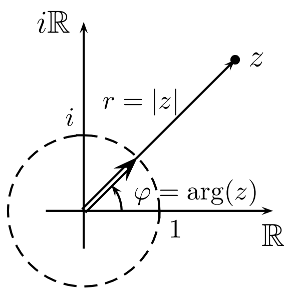
- die Winkel $-\varphi$ und $(-\varphi) + 2\pi = 2\pi - \varphi$, bzw.
- die Winkel φ und $\varphi + k \cdot 2\pi$ (k eine ganze Zahl)

ergeben stets denselben Einheitszeiger. Um die Position des Zeigers eindeutig anzugeben, genügt jedoch ein Winkelwert zwischen 0 und 2π.

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen und legen die folgenden Bezeichnungen fest:

Es sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl. z wird eindeutig beschrieben durch die Angabe

- der Länge $r = |z|$ des zugehörigen Zeigers (Vektors) und
- des Winkels φ, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse einschließt.



Man schreibt $z = re^{i\varphi}$ („r-mal Einheitszeiger mit Winkel φ") und bezeichnet dies als die **Polarform** der komplexen Zahl z. (Die bisher verwendete Form $z = a + bi$ nennt man **Normalform** der komplexen Zahl z.)
Der zu z gehörende Winkel φ zwischen 0 und 2π ($0 \leq \varphi < 2\pi$) wird als **Argument** der komplexen Zahl z bezeichnet. Man schreibt: $\varphi = \arg(z)$.
$z = 0$ stellt einen Sonderfall dar. Es ist $r = |z| = 0$, der Winkel $\varphi = \arg(0)$ ist frei wählbar.

Beachten Sie: φ und $\varphi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ergeben stets dieselbe komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$. In der Regel verwenden wir für φ Winkelwerte zwischen 0 und 2π. Mitunter ist es jedoch zweckmässig, mit negativen Winkelwerten zu rechnen.

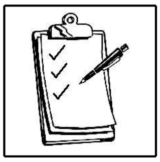
Aufgabe 28.

a) Geben Sie die folgenden Zahlen in Polarform an. Benutzen Sie dazu in Gedanken die entsprechende Zeigerdarstellung: 3, $3i$, -3, $-3i$.

b) Es sei $z = 4 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Bestimmen Sie $|z|$, $\arg(z)$, $\arg(-z)$, $\arg(\overline{z})$.

c) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen $z_n = 1 \cdot e^{i \cdot n \frac{\pi}{3}}$ in eine Gaußsche Zahlenebene ein ($n = 0, 1, 2, \ldots, 5$). Was für eine Figur bilden die Punkte $z_0, \ldots, z_5$?

Was versteht man unter der Polarform einer komplexen Zahl?
Was versteht man unter der Normalform einer komplexen Zahl?
Was versteht man unter dem Argument einer komplexen Zahl?

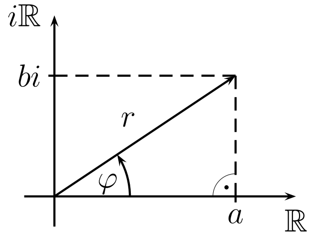


5.2 Wie kann man Polarform und Normalform ineinander umrechnen?

Vielleicht haben Sie sich bei der Bearbeitung der letzten Aufgaben die Frage gestellt: Wie bestimmt man in weniger einfachen Fällen aus der Polarform $z = re^{i\varphi}$ die Normalform $z = a + bi$?

Die Antwort ergibt sich mit Hilfe trigonometrischer Funktionen. Im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r}, \text{ also } a = r\cos(\varphi)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r}, \text{ also } b = r\sin(\varphi)$$



Es ist also $z = re^{i\varphi} = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = a + bi$.

Da $re^{i\varphi} = r\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ ist, können wir daraus ablesen, dass $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ gelten muss. Diese Formel verknüpft die Exponentialfunktion, den Cosinus, den Sinus und die imaginäre Einheit i auf ganz überraschende Weise. Wir werden später noch darauf zurückkommen. Bitte vergessen Sie aber nicht, dass $e^{i\varphi}$ für uns bisher nur eine Schreibweise für den Einheitszeiger mit Winkel φ ist. In anderen Büchern wird dafür oft der Ausdruck $\operatorname{cis}(\varphi)$ anstelle von $e^{i\varphi}$ verwendet.

Als Beispiel betrachten wir die Zahl $z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Es ist $r = 4$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ und damit

$$z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$

Da der Cosinus und der Sinus 2π-periodisch sind (d.h. $\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos(\varphi)$ sowie $\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \sin(\varphi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), ist die obige Formel auch für negative Winkel oder solche größer als 2π richtig.

Aufgabe 29. Berechnen Sie die Normalform der Zahlen

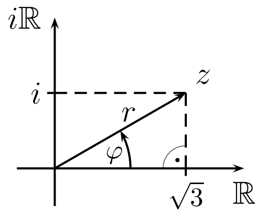
a) $1 \cdot e^{i \cdot 1}$ b) $6e^{i\frac{5\pi}{3}}$ c) $\overline{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ d) $3e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

(Geben Sie bei (a) die Zahl auf vier Nachkommastellen genau an. Beachten Sie die Einstellung rad beim Taschenrechner.)

Sie wissen nun also, wie Sie aus der Polarform einer komplexen Zahl die Normalform bestimmen können. Wie aber geht man umgekehrt vor? Wie erhält man aus der Normalform $z = a + bi$ die Polarform $z = re^{i\varphi}$? Wir betrachten dazu das Beispiel $z = \sqrt{3} + i$.

Für die Länge r des Zeigers ergibt sich

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$



Für den Winkel φ des Zeigers gilt

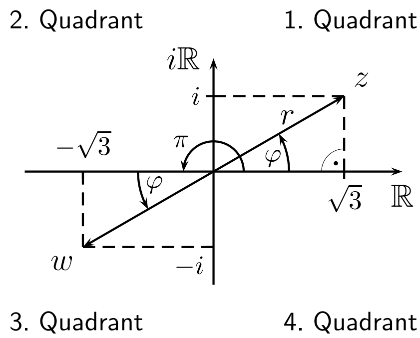
$$\tan(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und damit} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Das lief doch alles ganz glatt! Dass es auch Fälle gibt, bei denen man etwas vorsichtiger zu Werke gehen muss, zeigt Ihnen das folgende Beispiel. Wir betrachten nun nicht mehr $z = \sqrt{3} + i$, sondern $w = -\sqrt{3} - i$.

Es ist wiederum $r = |z| = 2$ und $\tan(\varphi) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.Die Anwendung des Arcustangens führt erneut auf den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ein Blick auf die Zeigerdarstellung von w zeigt aber, dass w im dritten Quadranten liegt und der zugehörige Winkel daher

$$\varphi^* = \varphi + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

beträgt.



Wir müssen also zum vorerst bestimmten Winkel φ noch den Winkel π addieren, um in den richtigen Quadranten zu gelangen.

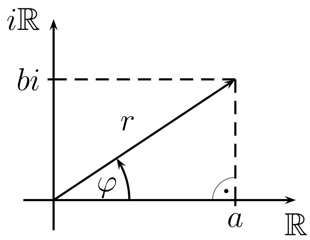
Wir merken uns dies ganz allgemein: Nach der Bestimmung des Winkels φ mit Hilfe des Arcustangens muss stets eine Quadrantenbetrachtung durchgeführt werden. Je nachdem ist der zugehörige Winkel dann entweder φ oder $\varphi^* = \varphi + \pi$.

Anstelle des Arcustangens verwenden manche Bücher oder Taschenrechner auch die Schreibweise $\tan^{-1}$. Die oben angesprochene Problematik kommt daher, dass der Tangens π-periodisch ist, d.h. es gilt $\tan(\varphi) = \tan(\varphi + \pi)$.

Wir fassen zusammen:

Es sei z eine komplexe Zahl.
Ist z in Polarform gegeben, also $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, dann ist die Normalform

$$z = r\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi),$$



d.h. $\mathrm{Re}(z) = a = r\cos(\varphi)$, $\mathrm{Im}(z) = b = r\sin(\varphi)$.

Ist z in Normalform gegeben, also $z = a + bi$ mit a, b reell, $a \neq 0$, dann ist die Polarform $z = re^{i\varphi}$ mit

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}.$$

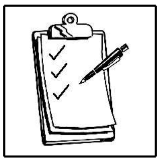
Je nachdem, in welchem Quadranten z liegt, führt $\tan(\varphi)$ auf $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ oder auf $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$.
Im Sonderfall $a = 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (falls $b > 0$) und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (falls $b < 0$).

Oft lässt sich die Polarform einer komplexen Zahl z am einfachsten mit Hilfe einer Zeichnung bestimmen (wie in Aufgabe 28). In weniger einfachen Fällen helfen die Umrechnungsformeln. Die nötige Übung im Umgang mit diesen Formeln erwerben Sie mit der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 30. Berechnen Sie die Polarform der Zahlen

a) $1 + i$ b) $-5 + 3i$ c) $-1 - \sqrt{3}i$ d) $\sqrt{7} - \frac{1}{2}i$

A30



Was versteht man unter der Polarform einer komplexen Zahl?
Was versteht man unter der Normalform einer komplexen Zahl?
Was versteht man unter dem Argument einer komplexen Zahl?
Wie bestimmt man aus der Polarform einer komplexen Zahl die Normalform?
Wie bestimmt man aus der Normalform einer komplexen Zahl die Polarform?

In der folgenden Aufgabe können Sie die bisher gelernten Begriffe noch einmal einüben:

A31

Aufgabe 31. Es sei $z = 2 + 4i$ und $w = -1 + 2i$. Berechnen Sie

a) $\arg(z \cdot w)$ b) $\left|\dfrac{z}{w - 3i}\right|$ c) die Polarform von $\dfrac{w}{z}$

(Geben Sie das Ergebnis in (c) auf zwei Nachkommastellen genau an.)

5.3 Die Multiplikation und Division in Polarform

Die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen können wir geometrisch als Vektoraddition, bzw. -subtraktion ihrer zugehörigen Vektoren interpretieren. Mit Hilfe der Polarform lässt sich nun auch die Multiplikation, bzw. Division zweier komplexer Zahlen geometrisch deuten.

A32

Aufgabe 32. Es sei $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3e^{i\cdot 60^\circ}$ (d.h. $r_1 = 3$, $\varphi_1 = 60^\circ$), $z_2 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\cdot 30^\circ}$ (d.h. $r_2 = 2$, $\varphi_2 = 30^\circ$).
(Wir verwenden in dieser Aufgabe ausnahmsweise das Gradmaß, um das Zusammenwirken der Winkel besser erkennbar zu machen.)

a) Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und dessen Polarform $re^{i\varphi}$ (d.h. $r = |z_1 \cdot z_2|$, und $\varphi = \arg(z_1 \cdot z_2)$).

b) Versuchen Sie, eine Rechenvorschrift für $r = |z_1 \cdot z_2|$ und $\varphi = \arg(z_1 \cdot z_2)$ aus $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ zu finden.

Die obige Aufgabe lässt vermuten: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Um diese Vermutung zu bestätigen, betrachten wir nun die Multiplikation in allgemeiner Form.

Für zwei komplexe Zahlen in Polarform ist

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1 \cos\varphi_1 + i r_1 \sin\varphi_1, \qquad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2 \cos\varphi_2 + i r_2 \sin\varphi_2.$$

Für ihr Produkt ergibt sich durch Multiplikation der Normalformen

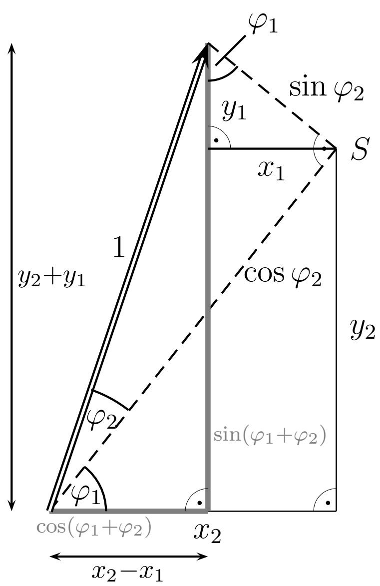
$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cos\varphi_1 + i r_1 \sin\varphi_1) \cdot (r_2 \cos\varphi_2 + i r_2 \sin\varphi_2) \\
&= r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i r_1 r_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i r_1 r_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\
&= r_1 r_2 \underbrace{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{\text{Vermutung 1: } \cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i r_1 r_2 \underbrace{(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{\text{Vermutung 2: } \sin(\varphi_1+\varphi_2)} \\
&= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad \text{mit der zugehörigen Polarform} \\
&= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.
\end{aligned}$$

Das heißt es gilt $|z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ (Produkt der Beträge) und $\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (Addition der Winkel), wie in der obigen Aufgabe vermutet.

Noch offen ist der Nachweis von Vermutung 1 und 2.

Für Cosinus und Sinus ist im Allgemeinen $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \neq \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2$, bzw. $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \neq \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2$. Richtig hingegen sind die Vermutungen 1 und 2: $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$, $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2$. Dies sind die so genannten *Additionstheoreme* für den Cosinus und den Sinus. Sie sind für alle Winkel φ_1 und φ_2 gültig, insbesondere auch für negative Winkel oder für solche größer als 2π. Falls Sie mit den Additionstheoremen vertraut sind, können Sie den folgenden Beweis überspringen.

Wir betrachten den Einheitszeiger (Doppelpfeil) zum Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ mit „Realteil" $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ und „Imaginärteil" $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ (beide grau in der Skizze).



Über dem Einheitszeiger wird mit dem Winkel φ_2 ein rechtwinkliges Dreieck mit Spitze S errichtet. Dessen Katheten (gestrichelt) haben die Längen $\cos\varphi_2$ und $\sin\varphi_2$. Der Punkt S legt die vier Streckenabschnitte y_1, y_2 und x_1, x_2 (ganzer Abschnitt) fest.

Im rechtwinkligen Teildreieck mit Hypotenuse $\sin\varphi_2$ errechnet man für den größeren Winkel den Wert φ_1, und es gilt

$$\sin\varphi_1 = \frac{x_1}{\sin\varphi_2}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{y_1}{\sin\varphi_2}, \quad \text{also}$$

$$x_1 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \quad y_1 = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Im rechtwinkligen Teildreieck mit Hypotenuse $\cos\varphi_2$ gilt:

$$\cos\varphi_1 = \frac{x_2}{\cos\varphi_2}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{y_2}{\cos\varphi_2}, \quad \text{also}$$

$$x_2 = \cos\varphi_1\cos\varphi_2, \qquad y_2 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1+\varphi_2) &= x_2 - x_1 = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) &= y_2 + y_1 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2.\end{aligned}$$

Damit sind die Vermutungen 1 und 2 für die dargestellte Anordnung bewiesen.

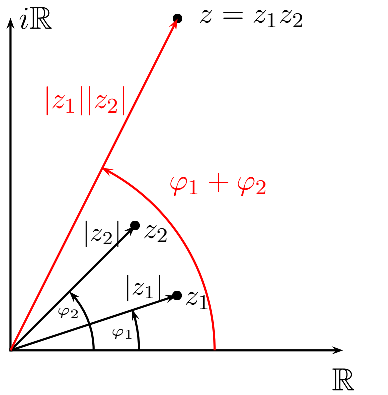
Wir halten das Ergebnis noch in einem Kasten fest.

Sind $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ zwei komplexe Zahlen, dann gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

In Worten ausgedrückt: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Das heißt

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \text{und}$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$



Diese Rechenvorschrift können Sie sich leicht merken, wenn Sie $e^{i\varphi}$ als „e hoch i mal φ" interpretieren. Für Potenzen mit gleicher Basis gilt nämlich nach dem Potenzgesetz: $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$.

Wenden Sie die neue Rechenvorschrift in der folgenden Aufgabe an. Beachten Sie, dass wir von nun an nur noch $e^{i\varphi}$ anstelle von $1 \cdot e^{i\varphi}$ schreiben.

Aufgabe 33. a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$3e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\pi} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{5\pi}{3}}, \qquad \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2.$$

b) Es sei $z = re^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl und n eine natürliche Zahl. Wie lautet die Polarform von z^n?

c) Berechnen Sie $(1+i)^6 + (1-i)^6$.
(Tipp: Verwenden Sie zum Potenzieren die Polarform.)

d) Es sei $z = re^{i\varphi} \neq 0$ eine komplexe Zahl. Mit welcher Zahl muss z multipliziert werden, damit sich als Produkt 1 ergibt?

Beachten Sie: Auch die Ergebnisse von Aufgabe 33 (b) und (d) können Sie sich ganz leicht mit Hilfe der Potenzgesetze merken:

Für die n-te Potenz, bzw. für den Kehrwert der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ gilt:

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}, \text{ bzw. } \qquad \frac{1}{z} = z^{-1} = \left(re^{i\varphi}\right)^{-1} = r^{-1}e^{i(-\varphi)}.$$

(Für die Potenz einer Potenz gilt nämlich nach dem Potenzgesetz: $(e^m)^n = e^{m\cdot n}$.)

Mit diesem Resultat lässt sich nun die Division zweier komplexer Zahlen in Polarform auf die Multiplikation zurückführen. Dies geschieht wie folgt:

Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \neq 0$ gilt:

$$= \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2^{-1}e^{i(-\varphi_2)} = \left(r_1 \cdot r_2^{-1}\right) e^{i(\varphi_1+(-\varphi_2))} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Wir halten fest:

Sind $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \neq 0$ zwei komplexe Zahlen, dann gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

In Worten ausgedrückt: Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert. Das heißt

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{und} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Überzeugen Sie sich in der nächsten Aufgabe von den Vorteilen der Polarform beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren.

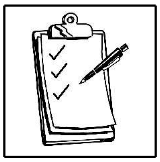
Aufgabe 34. a) Berechnen Sie für $v = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $w = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ die folgenden Ausdrücke und geben Sie das Ergebnis in Polarform an:

$$\frac{v \cdot w}{z}, \qquad w^{-3}, \qquad z^2 : v^5.$$

b) Bestimmen Sie das Ergebnis des folgenden Ausdrucks in Polarform und in Normalform: $\frac{i^{10}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^4}$.

c) Zeigen Sie: Sind z_1 und $z_2 \neq 0$ komplexe Zahlen, so ist $\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$.

Beachten Sie: Für das Addieren und Subtrahieren ist im Allgemeinen die Normalform geeigneter. Für das Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren ist die Polarform günstiger.



Wie bestimmt man aus der Polarform einer komplexen Zahl die Normalform?
Wie bestimmt man aus der Normalform einer komplexen Zahl die Polarform?
Wie multipliziert man zwei komplexe Zahlen in Polarform?
Wie dividiert man zwei komplexe Zahlen in Polarform?

5.4 e hoch i mal φ

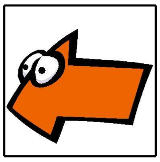
Im Abschnitt 5.1 haben wir für die Polarform einer komplexen Zahl die Schreibweise $re^{i\varphi}$ („r-mal Einheitszeiger mit Winkel φ") eingeführt. Dabei handelte es sich bis jetzt um eine reine Schreibweise. Von der Interpretation „e hoch i mal φ" haben wir bei allen Herleitungen oder Beweisen keinen Gebrauch gemacht. In diesem Abschnitt werden wir plausibel machen, dass die komplexe Zahl $e^{i\varphi}$ tatsächlich als e hoch i mal φ zu verstehen ist.
Keine Angst. Diesen Abschnitt müssen Sie nicht lückenlos wiedergeben können. Er enthält auch keine Aufgaben. Es genügt, wenn Sie ihn intuitiv nachvollziehen können.

Die Zahl $e = 2,7182818284 59\ldots$ wurde nach dem Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler (1707-1783) benannt. Diese sogenannte Eulersche Zahl e ist definiert als

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	$2,25$
10	$2,593742\ldots$
100	$2,704813\ldots$
1000	$2,716923\ldots$
100000	$2,718268\ldots$
10000000	$2,718281\ldots$

Dies wird durch die nebenstehende Tabelle verdeutlicht. Die Zahlen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nähern sich für n gegen unendlich immer mehr und ausschließlich der bestimmten Zahl $2,718281828459\ldots$



Der Schweizer Leonhard Euler war einer der bedeutendsten Mathematiker. Mehr hierzu erfahren Sie unter *http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler*

Allgemeiner gilt für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$

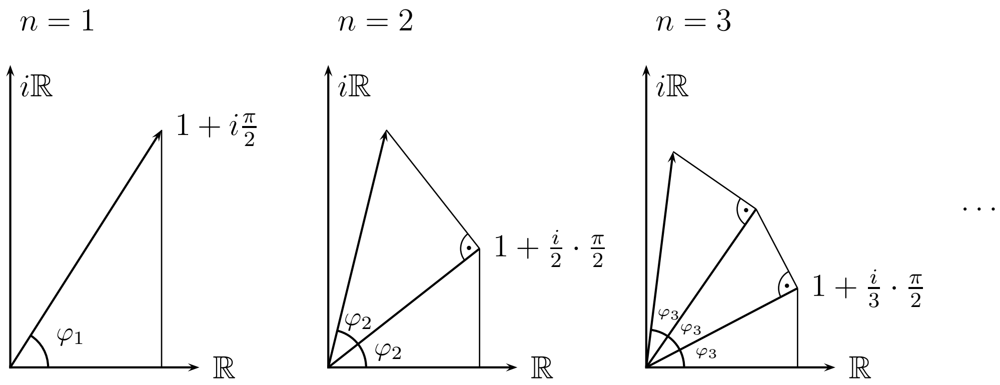
$$e^a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n,$$

was im Spezialfall $a = 1$ mit dem Obigen übereinstimmt. In der „Exponentiermaschine“ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\cdots}{n}\right)^n$ treten nur die Grundrechenoperationen auf, die auch in $\mathbb{C}$ erklärt sind. Wegen des Permanenzprinzips sollte die „Exponentiermaschine“ auch für komplexe Zahlen $a = i\varphi$ funktionieren.

Wir führen dies an dem Beispiel $a = i\frac{\pi}{2}$ vor und bestimmen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^n$.
Die folgende Tabelle „zeigt“, dass die Zahlen $\left(1 + \frac{i}{n}\frac{\pi}{2}\right)^n$ sich für n gegen unendlich immer mehr und ausschließlich der Zahl $0 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (Einheitszeiger mit Winkel $\frac{\pi}{2}$) nähern.

n	$\left(1 + \frac{i}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^n$
1	$1 + i \cdot 1,570796$
2	$0,383149\ldots + i \cdot 1,570796\ldots$
10	$0,014381\ldots + i \cdot 1,129518\ldots$
100	$0,000130\ldots + i \cdot 1,012411\ldots$
1000	$0,000001\ldots + i \cdot 1,001234\ldots$
100000	$0,000000\ldots + i \cdot 1,000012\ldots$

Zum besseren Verständnis betrachten wir die Zahlenfolge $\left(1 + \frac{i}{1} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^1$, $\left(1 + \frac{i}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2$, $\left(1 + \frac{i}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^3$, ... noch geometrisch.



Für die Polarform $r_n e^{i\varphi_n}$ des Faktors $\left(1 + \frac{i}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ gilt

$$r_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}}, \qquad \tan\varphi_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Mit der Rechenvorschrift zum Potenzieren erhält man

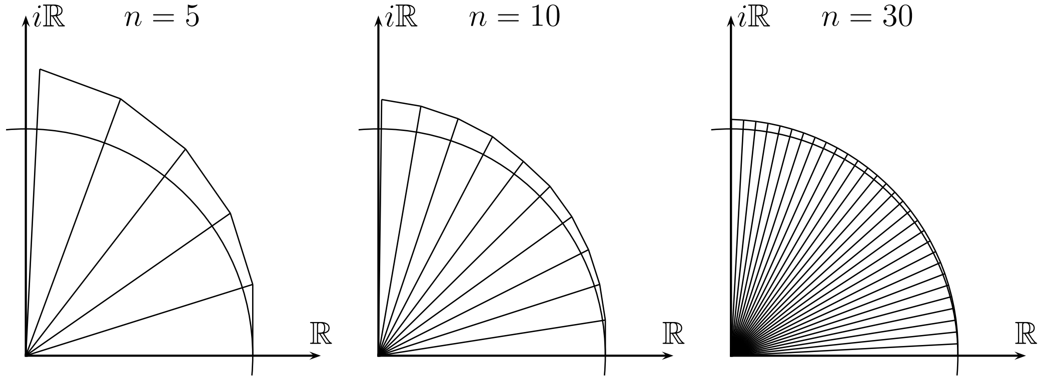
$$\left(1 + \frac{i}{n}\frac{\pi}{2}\right)^n = r_n^n e^{in\varphi_n} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}}\right)^n e^{in\varphi_n} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}\right)^n} \cdot e^{in\varphi_n}.$$

Für große n gilt nun näherungsweise, und für n gegen unendlich immer besser

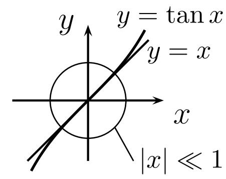
(1) $\tan\varphi_n \approx \varphi_n$, d.h. $\varphi_n \approx \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ und damit $n\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

(2) $\left(1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)^n \approx 1^n + n\cdot 1^{n-1}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}$, d.h. $\left(1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)^n \approx 1+\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi^2}{4} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Damit wird plausibel, dass die Zahlen $\left(1+\frac{i}{n}\frac{\pi}{2}\right)^n$ sich immer mehr und ausschließlich der Zahl $1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ (Einheitszeiger mit Winkel $\frac{\pi}{2}$) nähern. Dies wird durch die folgenden Bilder trefflich illustriert:



Noch offen ist die Begründung der beiden Näherungen (1) und (2).



Zu Näherung (1): Für $|x| \ll 1$ verläuft der Graph der Tangensfunktion annähernd identisch wie die Gerade $y = x$. D.h. es gilt dort $\tan x \approx x$.

Zu Näherung (2): Für $|x| \ll 1$ folgt mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks $(1+x)^n = 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot x + \ldots + x^n \approx 1 + n\cdot x$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ \ldots \\ 1\ n \ldots n\ 1 \end{array}$$

Damit wurde plausibel gemacht, dass die Exponentiermaschine auch für komplexe Zahlen $a = i\varphi$ funktioniert und allgemein

$$e^{i\varphi} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n$$

gilt. Bei $e^{i\varphi}$ handelt es sich also nicht um eine reine Schreibweise, sondern damit ist tatsächlich die Exponentialfunktion mit „e hoch i mal φ“ gemeint.

Setzt man $\varphi = \pi$, so erhält man $e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1$. Man kann diese Gleichung auch schreiben als $e^{i\pi} + 1 = 0$. Diese Gleichung wird von vielen Mathematikern als „die schönste Formel“ bezeichnet, denn in ihr treten die fünf Zahlen 0, 1, e, π und i auf - die fünf wichtigsten Zahlen für eine Mathematikerin. Ein Bankdirektor hat sicher größere Lieblingszahlen.

Lernkontrolle

Bravo! Sie sind am Ende des Leitprogramms angelangt. In der Lernkontrolle A können Sie Ihr Wissen zum Kapitel 5 überprüfen. Die Lösungen dazu finden Sie im Lösungsteil ganz am Ende des Leitprogramms.

Wenn Sie alle Aufgaben aus Lernkontrolle A erfolgreich bearbeitet haben, dann melden Sie sich für den Kapiteltest an. (Taschenrechner erforderlich!)

Lernkontrolle A:

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Zeichnung die Normalform von $w = \frac{1}{2}e^{-i\pi}$ und die Polarform von $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Ermitteln Sie ferner $|w|$ und $\arg(w - z)$.

b) Es sei $z = re^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl, deren Quadrat $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ ergibt, d.h. $z^2 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$. Berechnen Sie z. Finden Sie auch die zweite Lösung für z?

c) Bestimmen Sie das Ergebnis des folgenden Ausdrucks in Polar- und Normalform: $\left(\frac{-4i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3$.

Hat es geklappt? Melden Sie sich zum Kapiteltest an.

Bearbeiten Sie die Lernkontrolle B, wenn Sie den Kapiteltest nicht bestanden haben.

Lernkontrolle B:

a) Es sei $z = re^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Zeichnung die Polarform von $-z$ und $\overline{z}$. Ermitteln Sie ferner $|\pi e^{i\pi}|$ und $\arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

b) Welche geometrische Abbildung in der Gaußschen Zahlenebene entspricht der folgenden Vorschrift: Jede komplexe Zahl z wird mit i multipliziert. Finden Sie auch eine Interpretation für die Multiplikation mit $2i$?

c) Bestimmen Sie das Ergebnis des folgenden Ausdrucks in Polar- und Normalform: $\left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^6$.

Addita

Sie haben das Leitprogramm erfolgreich bearbeitet und haben Lust, noch etwas tiefer in die Welt der komplexen Zahlen hineinzuschnuppern? Dazu bieten wir Ihnen die folgenden Addita an. Sie können eines oder mehrere in beliebiger Reihenfolge bearbeiten.

Additum A: Drei theoretische Vertiefungen
In diesem Additum wird die Theorie der komplexen Zahlen weiter vertieft. Es werden drei Fragen untersucht:

- Darf man so einfach neue Zahlen definieren, wie wir das bei i getan haben?
- Was ist problematisch an der Schreibweise „$i = \sqrt{-1}$“?
- Ist die Zahl i positiv oder negativ?

Wenn Sie sich für theoretische Fragestellungen in der Mathematik interessieren, dann ist dieses Additum genau das Richtige für Sie.

Additum B: Die logarithmische Spirale
In diesem Additum wird eine Spiralform vorgestellt, die in der Natur eine wichtige Rolle spielt: die logarithmische Spirale. Logarithmische Spiralen lassen sich mit Hilfe von komplexen Zahlen besonders einfach beschreiben. Zudem spielen Sie eine interessante Rolle beim Flug von Motten um eine Kerze.

Wenn Sie sich für Anwendungen von mathematischen Theorien interessieren, oder auch für die Rolle der Mathematik in Biologie und Natur, dann sind Sie hier genau richtig.

Additum C: Juliamengen
In diesem Additum lernen Sie, welche Mathematik hinter den fraktalen Mustern von Juliamengen steckt. Natürlich spielen die komplexen Zahlen wieder eine wichtige Rolle. Auch ein Taschenrechner ist hilfreich - wir spielen mit hohen Beträgen!

Wenn Sie an schönen Bildern Freude haben oder schon lange einmal wissen wollten, was es mit Juliamengen auf sich hat, bearbeiten Sie Additum C.

Additum A: Drei theoretische Vertiefungen

Wie wir gesehen haben, bringt die Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ eine Menge Vorteile mit sich. Unter anderem ist nun jede quadratische Gleichung lösbar.
In diesem Additum werden Sie sehen, dass man bei der Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ allerdings auch aufpassen muss. Wir gehen auf drei Schwierigkeiten ein, die damit verbunden sind.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt werden Sie sehen, dass man nicht ohne weiteres eine neue Zahl definieren kann, wie wir es mit der imaginären Einheit i getan haben. In gewissen Fällen stößt man schnell auf unüberwindbare Schwierigkeiten.

Im zweiten Abschnitt erfahren Sie, warum die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ problematisch ist.

Im dritten Abschnitt sehen Sie, dass man bei der Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ nicht nur Eigenschaften gewinnt, sondern auch verliert.

A.1 Vorsicht mit neuen Zahlen!

Wir haben die imaginäre Einheit i definiert als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Warum sollten wir nicht ähnlich bei anderen Gleichungen vorgehen, die im Reellen keine Lösung besitzen?

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $x \cdot 0 = 1$.
Diese Gleichung besitzt keine Lösung in $\mathbb{R}$, denn das Produkt einer reellen Zahl mit 0 ist immer 0.

Analog zu unserem Vorgehen bei der Definition der imaginären Einheit definieren wir nun eine Zahl j, die eine Lösung der obigen Gleichung sein soll. Es soll also gelten

$$j \cdot 0 = 1.$$

Mit dieser Zahl j soll man nach den üblichen Regeln rechnen können (Permanenzprinzip!). Dann gilt zum Beispiel:

$$(0 + 0) \cdot j = 0 \cdot j = 1.$$

Es ist aber auch:

$$(0+0) \cdot j = 0 \cdot j + 0 \cdot j = 1 + 1 = 2.$$

Damit wäre gezeigt, dass $1 = 2$ gilt! Dies steht aber im Widerspruch zum Rechnen im Zahlbereich $\mathbb{R}$. Die Definition der Zahl j führt offensichtlich auf einen Widerspruch.

Das bedeutet, dass es keine sinnvolle Erweiterung von $\mathbb{R}$ gibt, in der die Gleichung $x \cdot 0 = 1$ eine Lösung besitzt.

Wir haben Glück, dass es mit i so gut funktioniert! Und vielleicht verstehen Sie jetzt auch, warum so viele Mathematiker und Mathematikerinnen sich so lange mit den imaginären Zahlen schwer getan haben. Man konnte ja nie wissen, ob man nicht irgendwann auf einen Widerspruch stößt!

A35

Aufgabe 35. Eine weitere Gleichung, die keine reelle Lösung besitzt, ist die Gleichung $10^x = 0$. Definieren Sie eine Zahl k, die Lösung der Gleichung $10^x = 0$ sein soll. Zeigen Sie, dass dann auch $k+1$ Lösung dieser Gleichung ist. Führen Sie das durch Logarithmieren oder Vergleichen der Exponenten auf einen Widerspruch.

A.2 i ist nicht „die Wurzel aus -1"!

In vielen Lehrbüchern findet man die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$. Wir haben ausgemacht, dass wir das vermeiden wollen. Was ist nun so problematisch an dieser Schreibweise?

Wenn man $i = \sqrt{-1}$ schreibt, dann ist man natürlich auch in Versuchung, die üblichen Rechenregeln für Wurzeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ zu übertragen. Das führt allerdings zu Schwierigkeiten. Die Wurzelrechnung ist im Komplexen etwas komplexer.

Zur Illustration rechnen wir einmal mit $i = \sqrt{-1}$ und den üblichen Rechenregeln für Wurzeln. Dabei kommt zum Beispiel das Folgende heraus:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

$-1 = 1$ steht offensichtlich im Widerspruch zum Rechnen im Zahlbereich $\mathbb{R}$. Die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ ist somit irreführend und sollte nicht verwendet werden.

A36

Aufgabe 36. Überlegen Sie sich, wo in der obigen Rechnung der Fehler stecken muss. Welche Operation ist demnach in $\mathbb{C}$ nicht erlaubt?

A.3 Ist i positiv oder negativ?

Aus dem Reellen wissen Sie: Eine von null verschiedene, reelle Zahl ist entweder positiv oder negativ. Überdies gilt: Reelle Zahlen lassen sich der Größe nach ordnen.

Wie ist das aber mit unserer neuen Zahl i?

i ist sicherlich nicht 0. Denn 0^2 ist 0, und i^2 ist -1.
Also kann nur noch $i > 0$ oder $i < 0$ gelten. Oder?

Nehmen wir einmal an, es wäre $i > 0$.

Die Ungleichung $i > 0$ können wir mit i multiplizieren. Da wir ja annehmen, dass i positiv ist, ändert sich dabei das „Größer-Zeichen“ nicht. Also erhalten wir durch Multiplikation der Ungleichung mit i

$$i^2 > 0 \cdot i$$

und durch Ausrechnen der Produkte auf der linken, bzw. rechten Seite

$$-1 > 0.$$

Dies steht im Widerspruch zum Rechnen im Zahlbereich $\mathbb{R}$. Die Ungleichung $i > 0$ ergibt keinen Sinn.

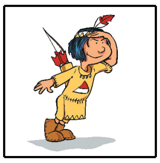
Nun, dann muss einfach $i < 0$ sein, oder?

Aufgabe 37. Führen Sie die Annahme $i < 0$ ebenfalls auf einen Widerspruch. Gehen Sie dabei ähnlich vor wie bei der Annahme $i > 0$.

Die Zahl i ist also weder positiv noch negativ!

Aufgabe 38. Auf dem reellen Zahlenstrahl haben die Beziehungen „größer als“ und „kleiner als“ eine anschauliche Interpretation. Welche ist das? Überlegen Sie sich, warum es in der Gaußschen Zahlenebene Schwierigkeiten gibt.

Additum B: Die logarithmische Spirale



In der Natur und im Alltag kommen eine Vielzahl von Spiralformen vor. Die Kerne von Sonnenblumen sind spiralförmig um den Mittelpunkt angeordnet, Schneckenhäuser wachsen spiralförmig, Luftschlangen sind als Spirale aufgewickelt.

In diesem Additum wollen wir uns mit einer bestimmten Spiralform beschäftigen, der logarithmischen Spirale.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt lernen Sie, wie Sie eine logarithmische Spirale mit Hilfe von komplexen Zahlen erzeugen können und wie logarithmische Spiralen definiert sind.

Im zweiten Abschnitt erfahren Sie, was logarithmische Spiralen mit dem Flug einer Motte zu tun haben. Und Sie bekommen eine Erklärung dafür, warum Motten von starken Lichtquellen nicht nur angezogen, sondern auch abgestoßen werden. Wussten Sie übrigens, dass das so ist?

B.1 Eine logarithmische Spirale entsteht

Statt langer Erklärungen legen wir einfach los:

A39

Aufgabe 39. Es sei $z = 1 + i$. Berechnen Sie z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7 und z^8 und zeichnen Sie die entstehenden Zahlen zusammen mit z als Punkte in ein Koordinatensystem. Verbinden Sie anschließend die Punkte durch Strecken.

Was Sie erhalten ist bereits eine Annäherung an eine logarithmische Spirale. Eine vollständige logarithmische Spirale erhält man, wenn man von den diskreten Exponenten $1, 2, \ldots, 8$ zu einem kontinuierlichen Exponenten $t \in \mathbb{R}$ übergeht. Statt $z^1, z^2, \ldots$ betrachten wir z^t mit $t \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten dies wieder am Beispiel $1+i$. Der Betrag von $1+i$ ist $\sqrt{2}$, das Argument ist $\frac{\pi}{4}$. (Rechnen Sie dies zur Übung ruhig noch einmal nach!) Wir können $1+i$ also in Polarform schreiben:

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Wir wollen $(1+i)^t$ für ein allgemeines $t\in\mathbb{R}$ berechnen. Mit der Polarform ist dies besonders einfach. Es ist

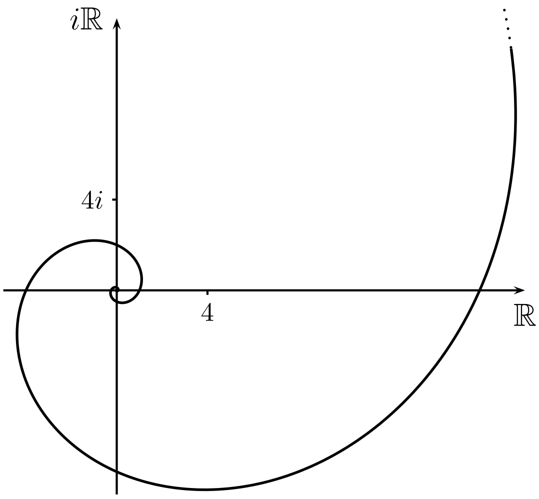
$$(1+i)^t=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^t=\left(\sqrt{2}\right)^t\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^t=2^{\frac{t}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}.$$

Die Gleichung für eine logarithmische Spirale lautet also

$$w(t)=2^{\frac{t}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}.$$

Zu jedem Wert t kann die Zahl $w(t)=(1+i)^t=2^{\frac{t}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}$ bestimmt werden und der zugehörige Punkt in der Gaußschen Zahlenebene eingezeichnet werden. Alle diese Punkte bilden eine Spirale, eine so genannte logarithmische Spirale.

In einer Skizze sieht das so aus:



Aufgabe 40. Überlegen Sie sich, wie die logarithmische Spirale in einer Umgebung der 0 aussieht. Betrachten Sie dazu immer kleiner werdende t, z.B. $t=-100$.

A 40

Wie ist nun die logarithmische Spirale allgemein definiert?

Auf den ersten Blick erscheint es sinnvoll, die folgende Vorschrift zu verwenden: Wenn z eine nicht reelle Zahl ist, dann betrachten wir die Kurve

$$w(t)=z^t,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Wie Sie sehen werden, erhält man aber nicht für alle nicht reellen Zahlen z eine Kurve, die „spiralförmig“ aussieht. Welche Zahlen man meidet und warum, können Sie sich in der folgenden Aufgabe überlegen:

A41

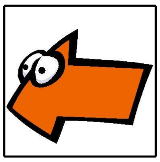
Aufgabe 41. Überlegen Sie sich was passiert, wenn man $z = i$ wählt. Welche anderen komplexen Zahlen verwendet man demnach auch nicht, um eine logarithmische Spirale zu erzeugen?

Wenn Sie die in Aufgabe 41 betrachteten, nicht reellen Zahlen z für die Bildung von logarithmischen Spiralen ausschließen, ergibt sich folgende Definition:

Es sei z eine nicht reelle Zahl mit $|z| \neq 1$. Die durch die Gleichung

$$w(t) = z^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

gegebene Kurve heißt **logarithmische Spirale**.



Es gab einen Mathematiker, der von der logarithmischen Spirale so begeistert war, dass er sie in seinen Grabstein gemeißelt haben wollte. Dass sein Wunsch nicht erfüllt wurde, ist noch heute im Baseler Münster zu sehen. Welche Spirale Jakob Bernoullis Grabstein ziert und warum können Sie beispielsweise in dem Buch von Johanna Heitzer ([Hei], Abschnitt 3.5.3) nachlesen. Dort finden Sie auch eine Erklärung, warum man diese Art von Spirale „logarithmisch“ nennt. Alternativ dazu können Sie unter „Jakob Bernoulli“ und „logarithmische Spirale“ im Internet recherchieren.

B.2 Mathematische Motten

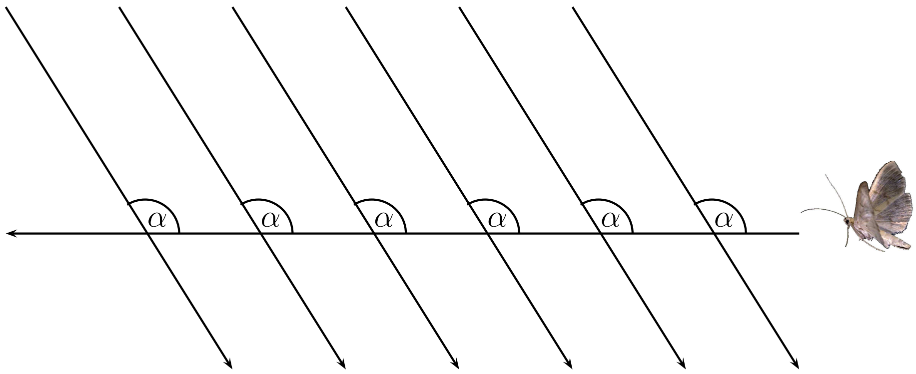
„Männer umschwirr'n mich wie Motten das Licht“ - sang Marlene Dietrich einst. Dass Motten und andere Nachtfalter von starken Lichtquellen angezogen werden, weiß jeder, der einmal im Sommer mit einer Lichtquelle im Freien gesessen hat oder sich im Freiluftkino über die Insektenschatten auf der Leinwand ärgern musste. Entomologen (Insektenkundler) benutzen diese Tatsache beim so genannten Lichtfang.

Warum ist das aber so? Wussten Sie, dass Motten auch von Lichtquellen abgestoßen werden können? Und was hat das Ganze eigentlich mit logarithmischen Spiralen zu tun?

Warum Motten vom Licht angezogen werden, ist noch nicht vollständig geklärt. Die plausibelste Theorie nimmt an, dass Motten sich bei ihren nächtlichen Flügen an natürlichen Lichtquellen orientieren. Der Mond oder auch helle Sterne bilden eine solche Lichtquelle.

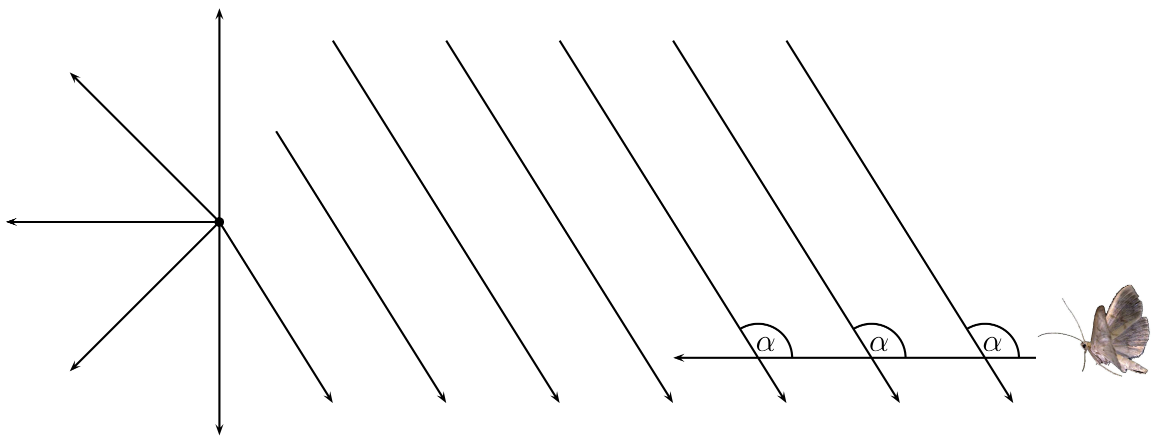
Man nimmt an, dass Motten geradeaus fliegen, indem sie zu den Lichtstrahlen dieser Lichtquellen einen konstanten Flugwinkel einhalten. Da der Mond nämlich sehr weit entfernt ist, sind die Lichtstrahlen, die von ihm bei uns auf der Erde ankommen, in guter Näherung Parallelen. Wenn die Motte also einen konstanten Winkel zu ihnen einhält, fliegt sie automatisch geradeaus.

Mit einer Skizze lässt sich dieses Prinzip besser verstehen. Das Mondlicht fällt schräg von links oben ein. Die Motte fliegt mit dem konstanten Flugwinkel α zu diesem Mondlicht:



Was passiert nun, wenn sich eine helle Lichtquelle wie etwa eine Kerze oder eine Lampe in der Nähe befindet?

Wir nehmen idealisiert an, dass diese Lichtquelle punktförmig ist. Die neue Skizze sieht dann so aus:



Aufgabe 42. Zeichnen Sie die Flugbahn der Motte in die obenstehende Skizze ein. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Motte zu den Lichtstrahlen stets den konstanten Flugwinkel α einhält. (Es genügt, wenn Sie die Flugbahn durch einen Streckenzug darstellen.)

A 42

Bei der Bearbeitung von Aufgabe 42 haben Sie festgestellt, dass sich die Motte spiralförmig auf die Lichtquelle zubewegt.

Die Form der Spirale sollte Ihnen bekannt vorkommen. Es handelt sich um eine *logarithmische* Spirale!

Logarithmische Spiralen haben nämlich die Eigenschaft, dass sie jede vom Ursprung ausgehende Gerade immer unter dem gleichen Winkel schneiden. In unserem Beispiel sind die vom Ursprung ausgehenden Geraden die Lichtstrahlen der künstlichen Lichtquelle. Die logarithmische Spirale ist die Flugbahn der Motte.

Diese Eigenschaft logarithmischer Spiralen müsste natürlich bewiesen werden. Wir wenden uns stattdessen noch einmal dem Mottenflug in der Nähe einer Kerze zu:

Aufgabe 43. Überlegen Sie sich:

a) Was passiert, wenn der Flugwinkel der Motte genau 90 Grad ist? Fertigen Sie dazu eine neue Skizze an, in der das Mondlicht senkrecht von oben einfällt, bevor die Motte auf die Lichtstrahlen der Kerze trifft.

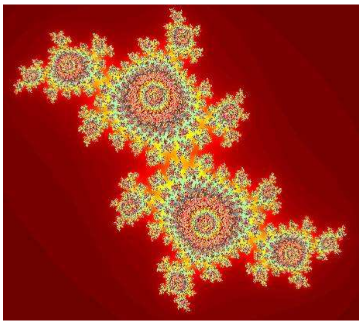
b) Was passiert, wenn der Flugwinkel der Motte kleiner als 90 Grad ist? Das Mondlicht fällt nun von rechts oben ein. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Vielleicht hätte Marlene Dietrich also singen sollen: „Männer umschwirren mich wie Motten das Licht - Manchmal nähern sie sich logarithmisch, manchmal aber auch nicht“...

Die logarithmische Spirale taucht in der Natur nicht nur beim Mottenflug auf. Informieren Sie sich in der Literatur (zum Beispiel [Hei] oder [Gla]) oder über das Internet darüber, wo die logarithmische Spirale sonst noch eine Rolle spielt.

Additum C: Juliamengen

Wahrscheinlich haben Sie schon solche Bilder gesehen oder den Namen gehört: Seit man Juliamengen auf dem Computer berechnen kann, sind Postkarten und Poster von den farbig schillernden Gebilden sehr beliebt.



In diesem Additum erfahren Sie, wie Juliamengen erzeugt werden können.

Wie gehen wir das an?
Im ersten Abschnitt sehen wir uns dazu eine Folge von komplexen Zahlen an. Juliamengen hängen nämlich eng mit komplexen Zahlenfolgen zusammen.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir nicht mehr eine Folge von komplexen Zahlen, sondern nur noch die Beträge der Folgeglieder. Die Beträge spielen für Juliamengen eine wichtige Rolle.

Im dritten Abschnitt endlich erfahren Sie, wie man von den Zahlenfolgen zu einer Juliamenge gelangt.

Im vierten Abschnitt lernen Sie noch ein weiteres Beispiel für eine Juliamenge kennen - und stoßen auf viele weiterführende Fragen!

C.1 Eine Folge von komplexen Zahlen

Vielleicht kennen Sie bereits den Begriff der „Zahlenfolge". Falls ja, dann sollte Ihnen dieser Abschnitt keinerlei Schwierigkeiten bereiten.
Wenn Sie noch nie etwas von Folgen gehört haben, macht das auch nichts. Sie werden schnell sehen, worum es geht.

Wir beginnen mit einem einfachen Rezept. Sie könnten dieses Rezept beispielsweise einem Computer einprogrammieren. Es lautet folgendermaßen:

1.) Nimm eine komplexe Zahl. (Diese Zahl nennen wir den *Startwert.*)
2.) Quadriere diese Zahl und subtrahiere 1 von der quadrierten Zahl.
3.) Nimm die so entstandene neue Zahl und wiederhole die Schritte 2 und 3 bis in alle Unendlichkeit ...

Wenn Sie dieses Rezept wirklich programmieren wollten, müssten Sie natürlich noch eine Abbruchbedingung einbauen. Beispielsweise könnten Sie eine Anweisung schreiben „Höre nach tausend Wiederholungen auf". Sonst läuft das Programm unendlich lange.

Wir wollen uns das Rezept einmal an einem Beispiel ansehen. Als Startwert nehmen wir die Zahl 2. Wir schreiben $z_0 = 2$. Damit drücken wir aus, dass 2 der Startwert unserer Zahlenfolge ist.

Nach dem Rezept sollen wir 2 nun quadrieren und anschließend 1 abziehen. Dadurch erhalten wir $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Diesen neuen Wert nennen wir z_1. Es ist also $z_1 = 3$.

Gemäß dem Rezept sollen wir nun wieder den zweiten und dritten Schritt ausführen, diesmal mit der Zahl 3 statt 2. Wir erhalten $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$. Diese Zahl nennen wir z_2. Es ist also $z_2 = 8$.

Wir können nun immer weiter fortfahren und erhalten neue Zahlen z_3, z_4, z_5, usw. Insgesamt erhalten wir eine *Zahlenfolge* $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots$

A 44

Aufgabe 44. Berechnen Sie doch selbst (mit Hilfe eines Taschenrechners) die Folgeglieder z_3 bis z_6.

Wir können die Zahlenfolge, die auf diese Weise entsteht, durch eine Rechenvorschrift angeben. Das sieht so aus:

$$z_0 = 2, \qquad z_{n+1} = z_n^2 - 1 \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Wenn Sie diese Schreibweise nicht gewöhnt sind, dann setzen Sie einmal $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ in die Formel ein und überzeugen Sie sich davon, dass die Formel oben nur eine kürzere Schreibweise für das anfänglich gegebene Rezept ist.

Wie Sie in Aufgabe 44 gesehen haben, werden bei der Folge oben die Folgeglieder immer größer. Ist das immer so? Was passiert, wenn wir statt 2 einen anderen Startwert z_0 wählen? Probieren Sie es einmal selbst aus:

A 45

Aufgabe 45. Führen Sie das Rezept für die folgenden Startwerte viermal durch (das heißt berechnen Sie jeweils z_1, z_2, z_3 und z_4).

a) $z_0 = 0$ b) $z_0 = 1 + i$ c) $z_0 = \frac{1}{2}$

(Tipp: Benutzen Sie einen Taschenrechner.)

C.2 Der Übergang zum Betrag

Im vorigen Abschnitt haben Sie gesehen, wie Sie eine Folge von komplexen Zahlen erzeugen können. In Aufgabe 45 haben Sie die ersten vier Zahlen von drei solchen Folgen berechnet.

In diesem Abschnitt soll es nun um das Verhalten solcher Folgen gehen. Dazu betrachten wir die Beträge der Zahlen in der Folge.

A 46

Aufgabe 46. Berechnen Sie zu den Zahlen, die Sie in Aufgabe 45 berechnet haben, jeweils die Beträge.

Bei dem ersten Beispiel ist der Fall klar: Die Beträge wechseln immer zwischen 0 und 1.

Bei dem zweiten Beispiel ist das Verhalten nicht ganz so klar. Aber immerhin scheint es so zu sein, dass die Beträge immer größer werden. Dass das tatsächlich der Fall ist, müsste man natürlich beweisen. Wir wollen uns hier aber mit der Vermutung zufrieden geben, dass es so ist.

Bei dem dritten Beispiel scheint es so zu sein, dass die Beträge immer kleiner als 1 bleiben. Das ist tatsächlich so. Überlegen Sie sich einmal, warum das so ist.

Wenn Sie weitere Startwerte wählen, werden Sie feststellen, dass Sie neue Folgen erhalten, die sich verschieden verhalten. Manche pendeln zwischen einigen wenigen Werten hin und her, manche werden betragsmäßig immer größer, und bei manchen scheinen die Beträge der Zahlen einen bestimmten Wert nie zu überschreiten, selbst wenn sie nicht nur zwischen zwei Werten hin und her schwanken. Im nächsten Abschnitt wollen wir das ausnutzen, um eine Juliamenge zu erhalten.

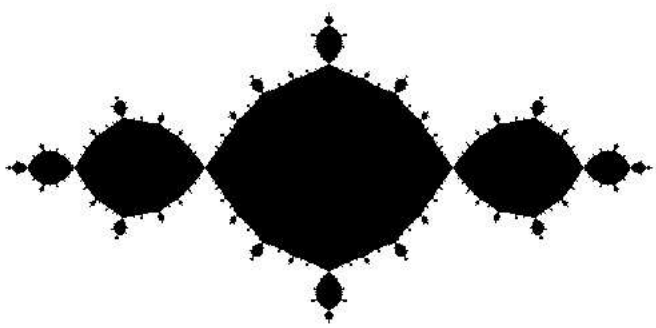
C.3 Eine Juliamenge entsteht

Wir benutzen nun unsere Zahlenfolgen, um die Punkte der Gaußschen Zahlenebene auf eine bestimmte Art und Weise zu färben. Dabei gehen wir nach folgendem Schema vor:

Wir nehmen eine komplexe Zahl z_0 in der Gaußschen Zahlenebene. Diese Zahl nehmen wir als Startwert für eine Folge von Zahlen, die nach dem oben beschriebenen Rezept berechnet wird. Jetzt färben wir den Punkt z_0 in der Gaußschen Zahlenebene entweder schwarz oder weiß. Und zwar entscheiden wir nach folgendem Kriterium:

Wachsen die Beträge der (theoretisch unendlich vielen) Zahlen in der Folge über alle Grenzen, so färben wir den Punkt weiß. Andernfalls färben wir den Punkt schwarz.

Nach und nach führen wir dies mit allen Punkten der Gaußschen Zahlenebene durch. Wir erhalten so ein schwarz-weißes Muster. Alle schwarzen Punkte in der Ebene zusammen sind - eine Juliamenge! Und so sieht sie aus:



Die reelle und imaginäre Achse haben wir weggelassen. Schließlich geht es uns nur um das Prinzip - wir wollen nicht genau berechnen, wo die Randpunkte auf den Achsen liegen. Das ist übrigens auch gar nicht so einfach.

C.4 Weitere Juliamengen

„Das soll eine Juliamenge sein?“, haben Sie bei dem Bild vielleicht gedacht. „Ich habe schon welche gesehen - und die sahen ganz anders aus!“
Nun, das kann gut sein. Es gibt nämlich nicht nur eine Juliamenge, sondern unendlich viele verschiedene!

Sehen wir uns doch noch einmal die Rechenvorschrift an, die zu unserer Juliamenge gehört. Zu einem Startpunkt z_0 haben wir die Folgenglieder der zugehörigen

Folge berechnet durch

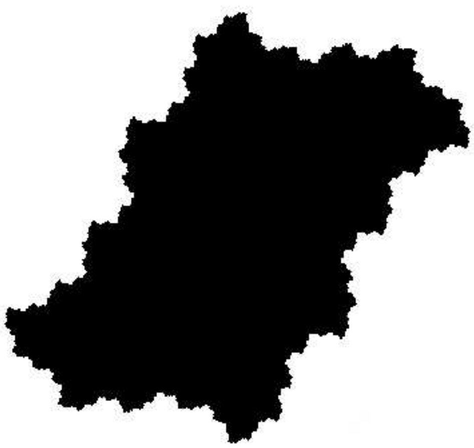
$$z_{n+1} = z_n^2 - 1 \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Wir haben von dem Quadrat eines Folgenglieds immer 1 abgezogen. Oder anders ausgedrückt: -1 dazu addiert.

Jetzt wollen wir die Rechenvorschrift ein wenig abändern: Wir addieren nicht mehr -1 dazu, sondern $\frac{1}{2}i$. Warum auch nicht? Wir berechnen dann zu einem Startpunkt z_0 die Folgenglieder der zugehörigen Folge durch die Vorschrift

$$z_{n+1} = z_n^2 + \frac{1}{2}i \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Danach gehen wir ganz genauso vor wie im ersten Beispiel: Wir färben einen Punkt der Ebene weiß, wenn die Beträge der zugehörigen Folgenglieder über alle Grenzen anwachsen, und andernfalls schwarz. Dadurch erhalten wir wieder eine Juliamenge. Sie sieht so aus:

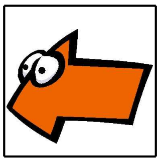


Schon irgendwie anders, oder?

Auf diese Weise können wir unendlich viele Juliamengen erzeugen. Die allgemeine Formulierung der Rechenvorschrift, mit der wir zu einem Startpunkt z_0 die Folgenglieder der zugehörigen Folge berechnen, lautet

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad \text{für alle } n \geq 0,$$

wobei c eine komplexe Zahl sein soll. Für jede komplexe Zahl c erhalten wir eine Juliamenge. Wie die Mengen für $c = -1$ und für $c = \frac{1}{2}i$ aussehen, haben wir schon gesehen.



Recherchieren Sie im Internet und finden Sie weitere Bilder von Juliamengen! Im Internet finden Sie auch viele Applets zu Juliamengen: Hier können Sie teilweise selbst Werte für c eingeben und die zugehörigen Juliamengen berechnen lassen. Zum Zeitpunkt der Entstehung dieses Leitprogramms gab es auf der folgenden Seite ein schönes Applet:
http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/JuliaMengeApplet.php
Auch in [Beh] finden Sie schöne Bilder - und eine ausführlichere Schilderung der Theorie.

Die Theorie der Juliamengen ist vielfältig und bunt, wie die Bilder, die Sie im Internet dazu finden können.

Ach ja, apropos: Bilder von Juliamengen sind deshalb so beliebt, weil sie farbig bunt sind und schön aussehen. Was haben eigentlich die schwarz-weißen Muster in diesem Leitprogramm mit diesem Farbenrausch zu tun?

Das ist nur eine von vielen Fragen, denen wir hier nicht mehr nachgehen. Genau wie die Frage, wie Sie denn nun selbst Bilder von Juliamengen auf dem Computer erzeugen können, oder woher der Name „Juliamenge" kommt. Und was ist mit der Mandelbrotmenge? Die taucht doch im Zusammenhang mit Juliamengen auch immer wieder auf. Und was haben Juliamengen mit Fraktalen zu tun?

Vielleicht sind Sie ja durch diese kurze Einführung auf den Geschmack gekommen, diesen Fragen selbst ein wenig nachzugehen. Als gute und verständlich geschriebene Einführung empfehlen wir das Buch von Reinhart Behr, das Sie in der Handbibliothek finden sollten. Viel Spaß damit!

Lösungen aller Aufgaben und Lernkontrollen

Oft gibt es bei den Aufgaben mehr als nur einen richtigen Lösungsweg. Es ist jedoch meist nur eine Lösung dargestellt.

Aufgaben zu Kapitel 1

Lösung zu Aufgabe 1

a) $i^2 = -1$ nach Definition von i.

b) $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.

c) $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

d) $(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

e) $-i^2 = -(-1) = 1$. (Exponent vor Punkt vor Strich!)

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\mathrm{Re}(-1+4i) = -1$, $\mathrm{Im}(-1+4i) = 4$

b) $\mathrm{Re}(2-5i) = 2$, $\mathrm{Im}(2-5i) = -5$

c) $\mathrm{Re}\left(\frac{3}{4}+7i\right) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{3}{4}+7i\right) = 7$

d) $\mathrm{Re}\left(\sqrt{7}+\frac{5}{6}i\right) = \sqrt{7}$, $\mathrm{Im}\left(\sqrt{7}+\frac{5}{6}i\right) = \frac{5}{6}$

e) $\mathrm{Re}\left(\sqrt{5}i\right) = 0$, $\mathrm{Im}\left(\sqrt{5}i\right) = \sqrt{5}$

f) $\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$, $\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$

g) $\mathrm{Re}(i) = 0$, $\mathrm{Im}(i) = 1$

h) $\mathrm{Re}(0) = 0$, $\mathrm{Im}(0) = 0$

i) Die Aussage ist falsch.
Begründung: Beispielsweise ist für $z = -1+4i$ die Summe von Realteil und Imaginärteil $\mathrm{Re}(-1+4i) + \mathrm{Im}(-1+4i) = -1+4 = 3 \neq -1+4i$.
(Auf der rechten Seite fehlt i. Richtig wäre: $z = \mathrm{Re}(z) + \boldsymbol{i}\,\mathrm{Im}(z)$.)
Wenn Sie noch weiter üben wollen, dann können Sie sich ja einmal überlegen, für welche komplexen Zahlen die Gleichung stimmt. (Antwort: Die Gleichung gilt nur für reelle Zahlen, also für komplexe Zahlen, deren Imaginärteil null ist.)

Lösung zu Aufgabe 3

a) $z = -5 + 3i$ b) $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $z = 8i$ d) $z = x + iy$

e) Wir können $z = a + bi$ mit a, b reell schreiben. Es ist dann

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(z)) = \mathrm{Re}(\mathrm{Im}(a + bi)) = \mathrm{Re}(b) = b \overset{\text{soll}}{=} 0.$$

b ist aber gerade der Imaginärteil von z. Eine komplexe Zahl mit Imaginärteil 0 ist reell. Also ist z reell.

Lösung zu Aufgabe 4

Beachten Sie, dass $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt.

a) $2 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ b) $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ c) $3 + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}$

d) $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e) $4i \in \mathbb{C}$

Lösung zu Lernkontrolle A

a) $-i^3 = (-1) \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot i = 1 \cdot i = i.$

b) $\mathrm{Re}(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7}$, $\mathrm{Im}(\frac{1}{7}) = 0.$
Die komplexe Zahl mit Realteil $\frac{1}{2}$ und Imaginärteil $-\sqrt{3}$ ist $\frac{1}{2} - \sqrt{3}i.$

c) $-5 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\sqrt{7}i \in \mathbb{C}$, $\frac{2}{9} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

d) Die Aussage ist falsch.
Begründung: Zum Beispiel für $z = 1 + i$ gilt $\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(z)) = \mathrm{Re}(\mathrm{Re}(1 + i)) = \mathrm{Re}(1) = 1 \neq 0.$
Der Realteil einer komplexen Zahl z ist im Allgemeinen nicht null. (Richtig wäre: $\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(z)) = \mathrm{Re}(z)$.)

Lösung zu Lernkontrolle B

a) $(-i)^3 = ((-1) \cdot i)^3 = (-1)^3 \cdot i^3 = (-1) \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot i = 1 \cdot i = i.$

b) $\mathrm{Re}(3 - \sqrt{2}i) = 3$, $\mathrm{Im}(3 - \sqrt{2}i) = -\sqrt{2}.$
Die komplexe Zahl mit Realteil 0 und Imaginärteil -4 ist $-4i.$

c) $2 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $2 - \frac{1}{3}i \in \mathbb{C}$, $-\sqrt{9} = -3 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$

d) Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wir können $z = a + bi$ schreiben mit a, b reell. a ist dabei der Realteil von z (also $a = \mathrm{Re}(z)$) und b ist der Imaginärteil von z (also $b = \mathrm{Im}(z)$). Also ist $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

Aufgaben zu Kapitel 2

Lösung zu Aufgabe 5

a) $(4+3i)+(2+i)=4+3i+2+i=6+4i$

b) $(4+3i)-(2+3i)=4+3i-2-3i=2$

c) $(\frac{1}{4}+2i)+(\frac{1}{5}-i)=\frac{1}{4}+2i+\frac{1}{5}-i=\frac{9}{20}+i$

d) $\mathrm{Re}\left((-2+i)-(-2-3i)\right)=\mathrm{Re}\left(-2+i+2+3i\right)=\mathrm{Re}(4i)=0$

e) $(\sqrt{5}+3i)+(-2+i)-(4i)=\sqrt{5}+3i-2+i-4i=\sqrt{5}-2$

f) $\mathrm{Im}\left(7-(4+3i)-(5-4i)\right)=\mathrm{Im}\left(7-4-3i-5+4i\right)=\mathrm{Im}(-2+i)=1$

g) Es gibt unendlich viele Lösungen. Beispielsweise ist

$$i=(1+2i)+(-1-i)=(\sqrt{5}-3i)+(-\sqrt{5}+4i)=0+i=\ldots$$

Sie können sich ja einmal Folgendes überlegen:
Es ist genau dann $(a+bi)+(c+di)=i$, wenn $a+c=0$ und $b+d=1$ gilt.

h) Die Antwort lautet: Nein.
Begründung: Wenn ai und bi zwei rein imaginäre Zahlen sind (a, b reell), dann ist auch $ai+bi=(a+b)i$ rein imaginär. Also kann die Summe zweier rein imaginärer Zahlen nie die reelle Zahl 1 sein.

Lösung zu Aufgabe 6

Sind $a+bi$ und $c+di$ zwei komplexe Zahlen (d.h. a,b,c,d reell), dann gilt

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Lösung zu Aufgabe 7

a) $v-w-z=6-i-4-5i=2-6i$

b) $v+w-z=6-i+4-5i=10-6i$

c) $\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(5i+4)=4$

d) $\mathrm{Im}(z-v)=\mathrm{Im}(5i-(6-i))=\mathrm{Im}(-6+6i)=6$

e) Wir können $z = a + bi$ und $w = c + di$ schreiben (a, b, c, d reell). Es ist dann $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(a + bi) + \mathrm{Re}(c + di) = a + c$ und
$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(a + bi + c + di) = \mathrm{Re}\left((a + c) + (b + d)i\right) = a + c.$
Also ist $\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$.
Die Aussage „$\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)$“ ist übrigens nur die Formelschreibweise für einen Teil der Merkregel, die Sie für die Addition gelernt haben: „Komplexe Zahlen werden addiert, indem man Realteile und Imaginärteile separat addiert.“ Übersetzt man diese Merkregel komplett in Formelschreibweise, so lautet sie: „Für zwei komplexe Zahlen z und w gilt $\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$“.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $v \cdot z = (1 + i) \cdot (2 - 5i) = 2 - 5i + 2i - 5i^2 = 2 - 3i + 5 = 7 - 3i$

b) $v(w - z) = (1 + i) \cdot (4i - (2 - 5i)) = (1 + i) \cdot (9i - 2) = 9i - 2 + 9i^2 - 2i$
$= 7i - 2 - 9 = -11 + 7i$

c) $vwz = (1 + i) \cdot 4i \cdot (2 - 5i) = (4i + 4i^2)(2 - 5i) = (-4 + 4i)(2 - 5i)$
$= -8 + 20i + 8i - 20i^2 = -8 + 28i + 20 = 12 + 28i,$
also $\mathrm{Re}(vwz) = \mathrm{Re}(12 + 28i) = 12$

d) $v + wz = 1 + i + 4i(2 - 5i) = 1 + i + 8i - 20i^2 = 1 + 9i + 20 = 21 + 9i,$
also $\mathrm{Im}(v + wz) = \mathrm{Im}(21 + 9i) = 9$

e) Die Aussage ist falsch.
Begründung: Wir können $z = a + bi$ schreiben mit a, b reell. Für z ist $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$. Multipliziert man nun z mit $-i$, so erhält man
$(-i) \cdot z = (-i) \cdot (a + bi) = -ai - bi^2 = -ai - b \cdot (-1) = -ai + b = b - ai.$
Es ist also $\mathrm{Re}(-iz) = b$ und $\mathrm{Im}(-iz) = -a$.
Der neue Realteil ist also tatsächlich der alte Imaginärteil, aber der neue Imaginärteil hat das entgegengesetzte Vorzeichen von dem alten Realteil. Die Aussage ist also im Allgemeinen nicht richtig.
Sie können sich ja einmal überlegen, für welche komplexen Zahlen z die Vertauschung richtig ist. (Antwort: Realteil und Imaginärteil werden bei Multiplikation mit $-i$ genau dann vertauscht, wenn $a = -a$, also $a = 0$ ist. Das bedeutet, dass der Realteil von z null sein muss, d.h. dass z eine rein imaginäre Zahl ist.)

Lösung zu Aufgabe 9

Sind $a + bi$ und $c + di$ zwei komplexe Zahlen (d.h. a, b, c, d reell), dann gilt

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Die Herleitung geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 = ac+(ad+bc)i-bd\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 10
Wir können $z=a+bi$ und $w=c+di$ schreiben mit a,b,c,d reell. Für z und w ist $\mathrm{Re}(z)=a$ und $\mathrm{Re}(w)=c$. Nach Aufgabe 9 ist $\mathrm{Re}(z\cdot w)=ac-bd$. Dies ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)=ac$.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $\overline{z}=\overline{\frac{1}{2}+4i}=\frac{1}{2}-4i$

b) $\overline{w}=\overline{3i}=-3i$

c) $\overline{w+z}=\overline{(3i)+(\frac{1}{2}+4i)}=\overline{\frac{1}{2}+7i}=\frac{1}{2}-7i$

d) $\overline{w^2-z}=\overline{(3i)^2-(\frac{1}{2}+4i)}=\overline{-9-\frac{1}{2}-4i}=-\frac{19}{2}+4i$

Lösung zu Aufgabe 12
Wir schreiben stets $z=a+bi$ mit a, b reell.

a) $z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(\overline{a+bi})=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-abi+abi-b^2i^2$
$=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

b) $z+\overline{z}=a+bi+\overline{a+bi}=a+bi+a-bi=2a=2\,\mathrm{Re}(z)$

c) $\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi=z$

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{3+2i}{7-i}=\frac{(3+2i)(7+i)}{(7-i)(7+i)}=\frac{21+3i+14i+2i^2}{49+1}=\frac{19+17i}{50}=\frac{19}{50}+\frac{17}{50}i$

b) $\frac{i}{-4-4i}=\frac{i(-4+4i)}{(-4-4i)(-4+4i)}=\frac{-4i+4i^2}{16+16}=\frac{-4-4i}{32}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i$

c) $\frac{1}{i}=\frac{-i}{i\cdot(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=-i$
Bemerkung: Steht im Nenner eine rein imaginäre Zahl, dann kann der Bruch auch anstatt mit der konjugiert komplexen Zahl einfach mit i erweitert werden. Also $\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i$ oder z.B. auch $\frac{1}{6i}=\frac{i}{6i\cdot i}=\frac{i}{-6}=-\frac{1}{6}i$. Dies ist meist einfacher!

d) $\frac{3+4i}{-i}=\frac{(3+4i)i}{(-i)\cdot i}=\frac{3i+4i^2}{-i^2}=\frac{-4+3i}{1}=-4+3i$

L 14

Lösung zu Aufgabe 14

Sind $a+bi$ und $c+di$ zwei komplexe Zahlen (d.h. a, b, c, d reell) und $c+di \neq 0$, dann gilt

$$(a+bi) : (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Die Herleitung geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned}(a+bi) : (c+di) &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} \\ &= \frac{ac+(bc-ad)i+bd}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

L 15

Lösung zu Aufgabe 15

a) $z^2 - vw = (6+4i)^2 - 5i(3-2i) = 36 + 48i - 16 - 15i - 10 = 10 + 33i$

b) $\frac{z-v}{z+v} = \frac{(6+4i)-5i}{(6+4i)+5i} = \frac{6-i}{6+9i} = \frac{(6-i)(6-9i)}{(6+9i)(6-9i)} = \frac{36-54i-6i+9i^2}{36-81i^2} = \frac{27-60i}{117} = \frac{3}{13} - \frac{20}{39}i$

c) $zw(z+v) = (6+4i)(3-2i)((6+4i)+5i) = (18-12i+12i-8i^2)(6+9i)$
$= 26(6+9i) = 156 + 234i$, also ist $\mathrm{Re}(zw(z+v)) = \mathrm{Re}(156+234i) = 156$

d) $\left(\frac{vw}{z}\right) = \frac{5i(3-2i)}{6+4i} = \frac{15i-10i^2}{6+4i} = \frac{10+15i}{6+4i} = \frac{(10+15i)(6-4i)}{(6+4i)(6-4i)} = \frac{60-40i+90i-60i^2}{36-16i^2}$
$= \frac{120+50i}{52} = \frac{30}{13} + \frac{25}{26}i$, also ist $\overline{\left(\frac{vw}{z}\right)} = \overline{\frac{30}{13} + \frac{25}{26}i} = \frac{30}{13} - \frac{25}{26}i$

e) Wir schreiben $z = a+bi$, $w = c+di$ mit a, b, c, d reell. Dann ist
$\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$
und
$\overline{z} \cdot \overline{w} = \left(\overline{a+bi}\right) \cdot \left(\overline{c+di}\right) = (a-bi)\cdot(c-di) = ac - adi - bci + bdi^2$
$= (ac-bd) - (ad+bc)i.$

L A

Lösung zu Lernkontrolle A

a)
- $(1+4i) + (3-3i) = 1 + 4i + 3 - 3i = 4 + i$
- $(1+4i) - (3-3i) = 1 + 4i - 3 + 3i = -2 + 7i$
- $(1+4i) \cdot (3-3i) = 3 - 3i + 12i - 12i^2 = 3 + 9i + 12 = 15 + 9i$
- $(1+4i) : (3-3i) = \frac{1+4i}{3-3i} = \frac{(1+4i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)} = \frac{3+3i+12i-12}{9+9} = \frac{-9+15i}{18}$
  $= -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}i$
- $\frac{1}{-i} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1} = i$

b) $\overline{\sqrt{2} - \frac{1}{3}i} = \sqrt{2} + \frac{1}{3}i$ und $\overline{4} = 4$

c) Indem man zunächst auf beiden Seiten der Gleichung $1+i$ subtrahiert erhält man $\frac{1}{z} = 1+2i$. Dies ist gleichbedeutend mit $z = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$ $= \frac{1-2i}{1-2i+2i-4i^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

d) Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wir schreiben $z = a+bi$, $w = c+di$ (a, b, c, d reell). Dann ist $\overline{z+w} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$ und $\overline{z}+\overline{w} = \overline{a+bi}+\overline{c+di} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$.

Lösung zu Lernkontrolle B

a)
- $(1+i)+(\sqrt{2}i) = 1+i+\sqrt{2}i = 1+(1+\sqrt{2})i$
- $(1+i)-(\sqrt{2}i) = 1+i-\sqrt{2}i = 1+(1-\sqrt{2})i$
- $(1+i)\cdot(\sqrt{2}i) = \sqrt{2}i+\sqrt{2}i^2 = \sqrt{2}i+\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
- $(1+i):(\sqrt{2}i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}i} = \frac{(1+i)i}{\sqrt{2}i^2} = \frac{i+i^2}{-\sqrt{2}} = \frac{i-1}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $\frac{1}{i^5} = \frac{1}{i^2\cdot i^2\cdot i} = \frac{1}{(-1)\cdot(-1)\cdot i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

b) $\overline{4i} = -4i$ und $\overline{0} = 0$

c) Es ist beispielsweise $7 = 7i\cdot(-i) = \sqrt{7}i\cdot\left(-\sqrt{7}i\right)$.
(Es gibt unendlich viele Lösungen.)

d) Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wir schreiben $z = a+bi$ (a, b reell). Dann ist $\operatorname{Im}(\overline{z}) = \operatorname{Im}(\overline{a+bi}) = \operatorname{Im}(a-bi) = -b$ und $-\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(a+bi) = -b$.

Aufgaben zu Kapitel 3

Lösung zu Aufgabe 16

a) $z^2 = -4 = 4\cdot(-1)$. Die Lösungen sind die konjugiert komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{4}i = 2i$ und $z_2 = -\sqrt{4}i = -2i$.

b) $z^2+3 = 0$ ist äquivalent zu $z^2 = -3 = 3\cdot(-1)$. Daher sind die Lösungen die konjugiert komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{3}i$ und $z_2 = -\sqrt{3}i$.

c) $6z^2 = 15$ ist äquivalent zu $z^2 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$. Da $\frac{5}{2}$ eine positive reelle Zahl ist, sind die Lösungen die beiden reellen Zahlen $z_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ und $z_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$. (Beachten Sie, dass reelle Zahlen auch komplexe Zahlen sind!)

d) $z^3 = -8z$ ist äquivalent zu $0 = z^3+8z = z(z^2+8)$. Das Produkt ist null, wenn $z = 0$ gilt oder wenn $z^2+8 = 0$, bzw. $z^2 = -8 = 8\cdot(-1)$ ist. Die Lösungen sind also $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{8}i$ und $z_3 = -\sqrt{8}i$. (Gleichung **3**-ten Grades mit **3** Lösungen.)

Lösung zu Aufgabe 17
Die Gleichung $(z-3)^2+4=0$ ist äquivalent zu $(z-3)^2=-4=4\cdot(-1)$. Daher gilt $z-3=2i$ oder $z-3=-2i$. Die Lösungen sind also $z_1=3+2i$ und $z_2=3-2i$.

Lösung zu Aufgabe 18
Multiplikation mit 2 ergibt $2z^2+z+6=0$. Es ist also $a=2$, $b=1$, $c=6$ und damit die Diskriminante $D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 2\cdot 6=1-48=-47$. $w=\sqrt{47}i$ ist eine Zahl, für die gilt: $w^2=D$. Dies führt auf die konjugiert komplexen Lösungen $z_{1,2}=\frac{-b\pm w}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{47}i}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{47}}{4}i$.
(Bemerkung: Wenn Sie nicht mit 2 multiplizieren, erhalten Sie $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=3$ und damit die Diskriminante $D=b^2-4ac=\frac{1}{4}-12=-\frac{47}{4}$. Dies führt auf $w=\frac{\sqrt{47}}{2}i$ und damit auf die gleichen Lösungen.)

Lösung zu Aufgabe 19

a) Es ist $a=1$, $b=-4$, $c=20$ und damit die Diskriminante $D=b^2-4ac$ $=16-80=-64$. $w=8i$ ist eine Zahl mit $w^2=D$. Dies führt auf die konjugiert komplexen Lösungen $z_{1,2}=\frac{-b\pm w}{2a}=\frac{4\pm 8i}{2}=2\pm 4i$.

b) Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2-4z-45=0$. Es ist also $a=1$, $b=-4$, $c=-45$ und damit die Diskriminante $D=b^2-4ac=16+180=196$. $w=14$ ist eine Zahl mit $w^2=D$. Dies führt auf die reellen Lösungen $z_{1,2}=\frac{-b\pm w}{2a}=\frac{4\pm 14}{2}$, also auf $z_1=9$ und $z_2=-5$.

c) Es ist $a=2$, $b=-1$, $c=1$ und damit die Diskriminante $D=b^2-4ac$ $=1-8=-7$. $w=\sqrt{7}i$ ist eine Zahl mit $w^2=D$. Dies führt auf die konjugiert komplexen Lösungen $z_{1,2}=\frac{-b\pm w}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{4}=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i$.

d) Hat die Gleichung nur reelle Lösungen, dann ist die Aussage klar: Das Produkt von reellen Zahlen ist immer reell.
Hat die Gleichung nicht reelle Lösungen, dann sind diese nach der Lösungsformel komplex konjugiert zueinander. Das Produkt einer komplexen Zahl mit der zu ihr konjugiert komplexen Zahl ist ebenfalls reell.

e) $1+i$ löst die Gleichung, d.h. es gilt
$0=(1+i)^2-2(1+i)+a=1+2i+i^2-2-2i+a=-2+a$. Daher ist $a=2$. Da z_1 eine nicht reelle Lösung der Gleichung ist, muss die zweite Lösung konjugiert komplex zu z_1 sein, d.h. $z_2=1-i$.

Lösung zu Lernkontrolle A

a) $z^2 + 17 = 8z$ ist äquivalent zu $z^2 - 8z + 17 = 0$. Es ist also $a = 1$, $b = -8$, $c = 17$ und damit die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 64 - 68 = -4$. $w = 2i$ ist eine Zahl mit $w^2 = D$. Dies führt auf die konjugiert komplexen Lösungen $z_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2a} = \frac{8 \pm 2i}{2} = 4 \pm i$.

b) Die Substitution (Ersetzung) $u = z^2$ führt auf die quadratische Gleichung $u^2 + 3u - 54 = 0$. Es ist $a = 1$, $b = 3$, $c = -54$ und damit die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 9 + 216 = 225$. $w = 15$ ist eine Zahl mit $w^2 = D$. Dies führt auf die Lösungen $u_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2a} = \frac{-3 \pm 15}{2}$, also auf $u_1 = 6$ und $u_2 = -9$. Also gilt $z^2 = 6$ oder $z^2 = -9$. Dies führt auf die Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{6}$ und $z_{3,4} = \pm 3i$. (Gleichung **4**-ten Grades mit **4** Lösungen.)

c) Die Aussage ist falsch.
Begründung: $z^2 - 6z + 10 = 0$ ist eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten. Wenn die Lösungen dieser Gleichung nicht reell sind, dann sind sie konjugiert komplex zueinander. Da $3 + i$ und $4 + i$ weder reell noch konjugiert komplex zueinander sind, können sie also auch nicht Lösungen dieser Gleichung sein.
Alternative Begründung: Sie können berechnen, dass die Gleichung die konjugiert komplexen Lösungen $3 + i$ und $3 - i$ besitzt.

d) Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wenn die Gleichung eine nicht reelle Lösung besitzt, dann besitzt sie noch eine zweite Lösung, die konjugiert komplex zu der ersten ist. Also kennt man in diesem Fall die zweite Lösung ebenfalls, nämlich die konjugiert komplexe Zahl zu der ersten Lösung.

Lösung zu Lernkontrolle B

a) Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2 + 8z + 25 = 0$. Es ist also $a = 1$, $b = 8$, $c = 25$ und damit die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 64 - 100 = -36$. $w = 6i$ ist eine Zahl mit $w^2 = D$. Dies führt auf die konjugiert komplexen Lösungen $z_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2a} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$.

b) Die Gleichung ist äquivalent zu $z(z^2 - 4z + 6) = 0$. Es ist also entweder $z = 0$ oder $z^2 - 4z + 6 = 0$. Bei der zweiten Gleichung ist $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$ und damit die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8$. $w = \sqrt{8}i$ ist eine Zahl mit $w^2 = D$. Dies führt auf die Lösungen $z_1 = 0$ und $z_{2,3} = \frac{-b \pm w}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{8}i}{2} = 2 \pm \sqrt{2}i$. (Gleichung **3**-ten Grades mit **3** Lösungen.)

c) Die Aussage ist falsch.
Begründung: 2 und 3 sind beispielsweise zwei verschiedene Lösungen der Gleichung $0 = (z - 2)(z - 3) = z^2 - 5z + 6$, aber es ist $\mathrm{Re}(2) = 2 \neq 3 = \mathrm{Re}(3)$.

Sie können sich ja einmal überlegen, in welchem Fall $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(z)$ gilt. (Die Aussage ist richtig, wenn w und z nicht reelle Lösungen sind.)

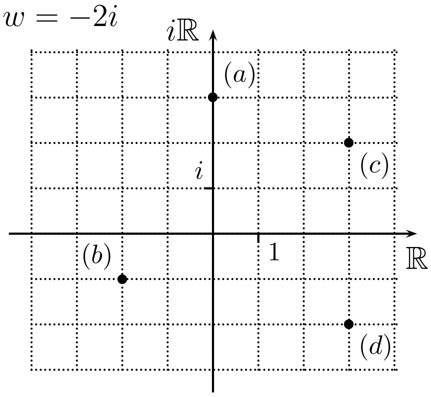
d) Eine einfache Gleichung ist $0 = (z - z_1)(z - z_2) = (z - ib)(z + ib) = z^2 + b^2$, also $z^2 = -b^2$.

Aufgaben zu Kapitel 4

L 20

Lösung zu Aufgabe 20

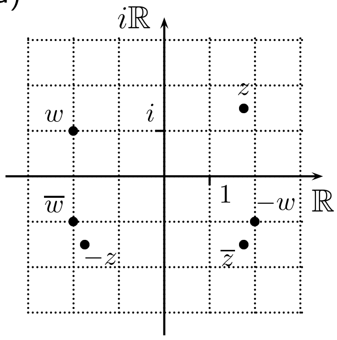
e) $u = 3, \;\; v = -3 + i, \;\; w = -2i$



L 21

Lösung zu Aufgabe 21

a)

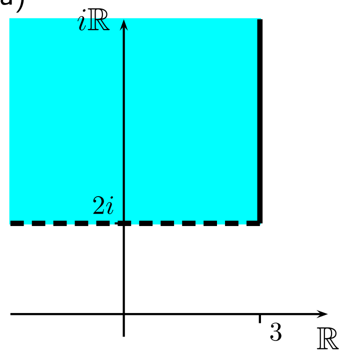


b) Dem Bilden der entgegengesetzten Zahl entspricht in der Gaußschen Zahlenebene eine Punktspiegelung am Nullpunkt. Denn es gilt: $-z = -(a + bi) = -a + (-b)i$.
Dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl entspricht in der Gaußschen Zahlenebene eine Achsenspiegelung an der reellen Achse. Denn es gilt: $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi = a + (-b)i$.

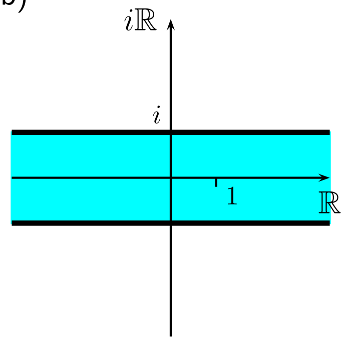
L 22

Lösung zu Aufgabe 22

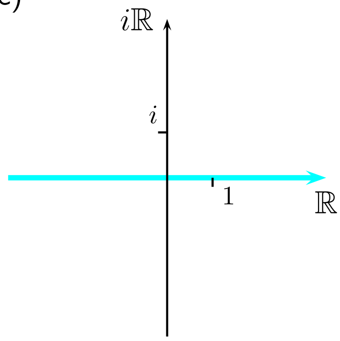
a)



b)

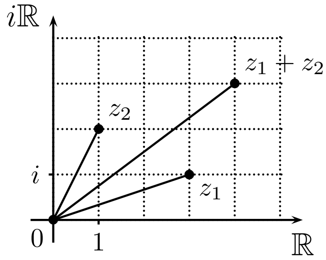


c)



Lösung zu Aufgabe 23

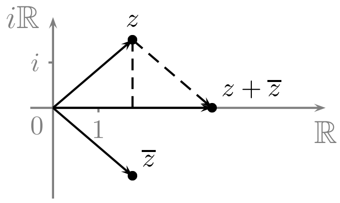
a)



b) Fasst man die vom Nullpunkt ausgehenden Verbindungslinien jeweils als Vektoren auf, dann entspricht das Addieren von z_1 und z_2 in der Gaußschen Zahlenebene der Addition der zu z_1 und z_2 gehörenden Vektoren. (Das heißt der Vektor, der zu $z_1 + z_2$ gehört, entsteht durch Addition der Vektoren, die zu z_1 und z_2 gehören.)

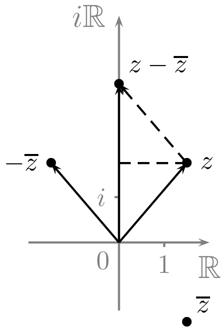
Lösung zu Aufgabe 24

a)



Da z und $\overline{z}$ symmetrisch zur reellen Achse liegen, liegt der zur Summe gehörende Vektor $z + \overline{z}$ auf der reellen Achse. Aus Symmetriegründen liegt er genau doppelt so weit vom Nullpunkt entfernt wie der ursprüngliche Vektor zu z. Das heißt aber nichts anderes, als dass $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ ist, und das ist gleichbedeutend mit $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$.

b)



Da z und $-\overline{z}$ symmetrisch zur imaginären Achse liegen, liegt der zur Summe gehörende Vektor $z - \overline{z} = z + (-\overline{z})$ auf der imaginären Achse. Aus Symmetriegründen liegt er genau doppelt so weit vom Nullpunkt entfernt wie der ursprüngliche Vektor zu z. Das heißt aber nichts anderes, als dass $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$ ist, und das ist wiederum gleichbedeutend mit $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \mathrm{Im}(z)$.

Lösung zu Aufgabe 25

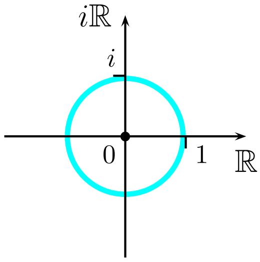
a) Aus der Zeichnung liest man ab: $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2 + i$, $z_1 - z_2 = 4 + i$.
Man erhält somit die Beträge
$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,
$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$,
$|z_1 - z_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.

b) Da $-\pi$ reell ist, ist $|-\pi| = \pi$.
$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$.
$|-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

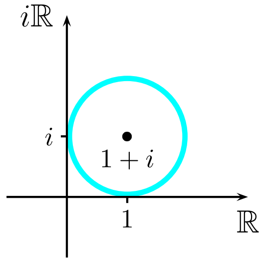
L 26

Lösung zu Aufgabe 26

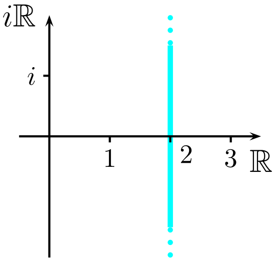
a)



b)



c)

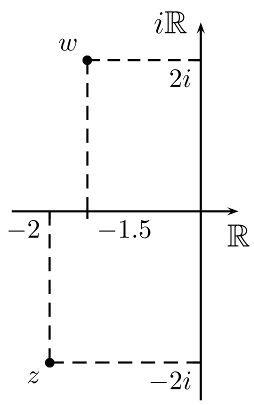


Zu (a): $1 = |z| = |z - 0|$ beschreibt die Menge aller Punkte z, die von 0 den Abstand 1 haben. Dies ist ein Kreis um 0 mit Radius 1.
Zu (b): $|z - (1 + i)| = 1$ beschreibt die Menge aller Punkte z, die von $1 + i$ den Abstand 1 haben. Dies ist ein Kreis um $1 + i$ mit Radius 1.
Zu (c): Die Gleichung $|z - 1| = |z - 3|$ beschreibt die Menge aller Punkte z, die von 1 und 3 den gleichen Abstand haben. Es handelt sich bei dieser Menge daher um die Mittelsenkrechte zu der Verbindungsstrecke von 1 und 3.

L A

Lösung zu Lernkontrolle A

a)

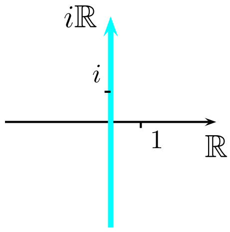


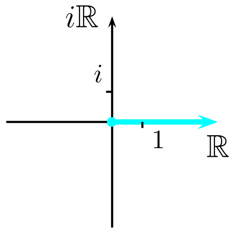
$$|w| = \sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4} + 4} = \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \tfrac{5}{2}.$$
$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

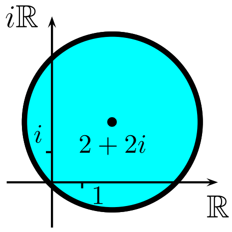
$$\begin{aligned}|w - z| &= \left|-\frac{3}{2} + 2i - (-2 - 2i)\right| = \left|-\frac{3}{2} + 2 + 4i\right| \\ &= \left|\frac{1}{2} + 4i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 16} \\ &= \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{65}.\end{aligned}$$

b) Der Addition von $-1 + i$ zu jeder komplexen Zahl z entspricht eine Translation (Verschiebung) um den zu $-1 + i$ gehörenden Vektor.

c)



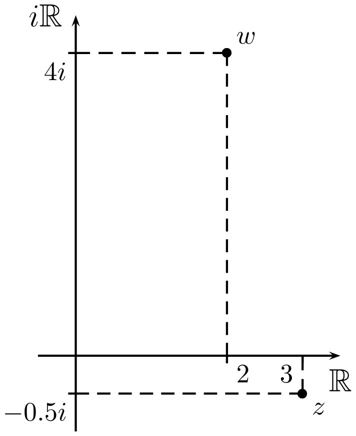




Zur dritten Unteraufgabe:
$|z - 2 - 2i| \leq 3$ ist gleichbedeutend mit $|z - (2 + 2i)| \leq 3$. Dies beschreibt die Menge aller Punkte z, die von $2 + 2i$ höchstens den Abstand 3 haben.

Lösung zu Lernkontrolle B

a)

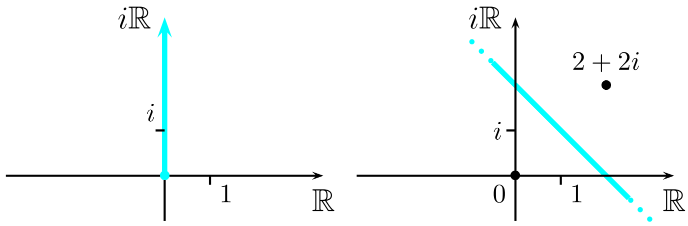


$$|w| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$
$$|z| = \sqrt{3^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{37}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{37}.$$

$$\begin{aligned}|w - z| &= \left|2 + 4i - \left(3 - \frac{1}{2}i\right)\right| = \left|-1 + 4i + \frac{1}{2}i\right| \\ &= \left|-1 + \frac{9}{2}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{81}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{85}.\end{aligned}$$

b) Der Bildung von $-\overline{z}$ zu jeder komplexen Zahl z entspricht eine Spiegelung an der imaginären Achse. Denn es gilt: $-\overline{z} = -\overline{(a + bi)} = -(a - bi) = (-a) + bi$ für $z = a + bi$ mit a, b reell.

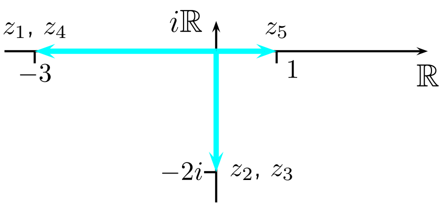
c)



Zur zweiten Unteraufgabe: $|z| = |z - 2 - 2i|$ ist gleichbedeutend mit $|z - 0| = |z - (2 + 2i)|$. Dies beschreibt die Menge aller Punkte z, die von 0 und $2 + 2i$ den gleichen Abstand haben. Das ist die Mittelsenkrechte zu der Verbindungsstrecke von 0 und $2 + 2i$.

Aufgaben zu Kapitel 5

Lösung zu Aufgabe 27

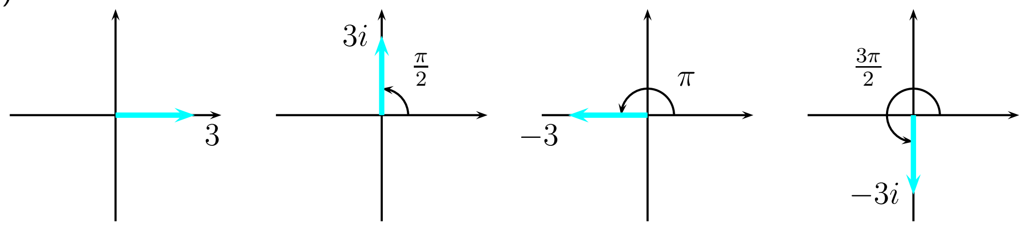


$$z_1 = z_4 = -3,$$
$$z_2 = z_3 = -2i,$$
$$z_5 = 1.$$

L 28

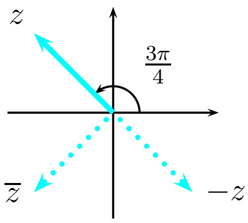
Lösung zu Aufgabe 28

a)



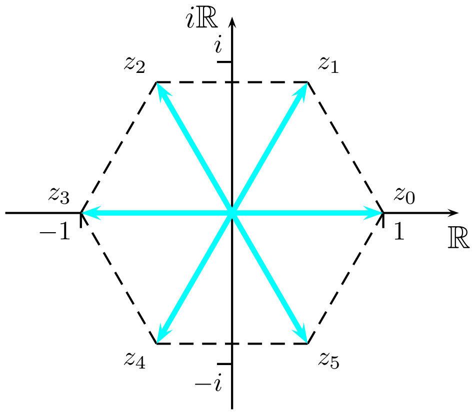
$3 = 3 \cdot e^{i \cdot 0}$ $\quad$ $3i = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ $\quad$ $-3 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi}$ (*nicht* $-3e^{i \cdot 0}$) $\quad$ $-3i = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$ (*nicht* $-3e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$)

b)



$|z| = 4, \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4},$
$-z \overset{\text{Figur}}{=} 4e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)} = 4e^{i\frac{7\pi}{4}}$
$\overline{z} = 4e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}.$
$\arg(-z) = \frac{7\pi}{4}$
$\arg(\overline{z}) = \frac{5\pi}{4}$

c)



Die Punkte bilden ein regelmäßiges Sechseck.

L 29

Lösung zu Aufgabe 29

a) Es ist $r = 1$ und $\varphi = 1$ und damit
$1 \cdot e^{i \cdot 1} = 1\,(\cos(1) + i\sin(1)) = \cos(1) + i\sin(1) = 0,5403 + 0,8415\,i.$

b) Es ist $r = 6$ und $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ und damit $6e^{i\frac{5\pi}{3}} = 6\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$
$= 6\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i6\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} + i6 \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 3 - 3\sqrt{3}\,i.$

c) $\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i(-\frac{1}{2}\sqrt{2})\right)$
$= -1 - i$. Damit ist $\overline{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \overline{-1-i} = -1 + i.$

d) $3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i.$
$\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i(-\frac{1}{2}\sqrt{3})\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i.$
Damit ist $3e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i - (-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i) = 2\sqrt{3} + 3i.$

Lösung zu Aufgabe 30

a) Es ist $a = 1$ und $b = 1$ und damit $r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Außerdem ist $\tan(\varphi) = \frac{1}{1} = 1$. Der Taschenrechner liefert $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Da $1 + i$ im ersten Quadranten liegt, ist dies auch der gesuchte Winkel. Es ist also $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Es ist $r = |-5 + 3i| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$. Außerdem ist $\tan(\varphi) = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$. Der Taschenrechner liefert $\varphi_{\text{TR}} = -0,5404$ (auf vier Nachkommastellen genau). Da $-5 + 3i$ im zweiten Quadranten liegt, muss noch π dazuaddiert werden. Der Winkel ist also $\varphi = 2,6012$ (auf vier Nachkommastellen genau). Es ist also $-5 + 3i = \sqrt{34}e^{2,6012\ i}$.

c) Es ist $r = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$. Außerdem ist $\tan(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$. Der Taschenrechner liefert $\varphi_{\text{TR}} = \frac{\pi}{3}$. Da $-1 - \sqrt{3}i$ im dritten Quadranten liegt, muss noch π dazuaddiert werden. Der Winkel ist also $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Es ist also $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

d) Es ist $r = |\sqrt{7} - \frac{1}{2}i| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{7 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$. Außerdem ist $\tan(\varphi) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. Der Taschenrechner liefert $\varphi = -0,1868$ (auf vier Nachkommastellen genau). Da $\sqrt{7} - \frac{1}{2}i$ im vierten Quadranten liegt, ist dies auch der gesuchte Winkel. Es ist also $\sqrt{7} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\sqrt{29}\ e^{-0,1868\ i}$.

Lösung zu Aufgabe 31

a) Es ist $z \cdot w = (2 + 4i) \cdot (-1 + 2i) = -2 + 4i - 4i - 8 = -10 = 10e^{i\pi}$ (Zeichnung!), also ist $\arg(z \cdot w) = \pi$.

b) Es ist $\frac{z}{w-3i} = \frac{2+4i}{-1+2i-3i} = \frac{2+4i}{-1-i} = \frac{(2+4i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-2-4i+2i-4}{1+1} = \frac{-6-2i}{2} = -3 - i$, also $\left|\frac{z}{w-3i}\right| = |-3 - i| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

c) Es ist $\frac{w}{z} = \frac{-1+2i}{2+4i} = \frac{(-1+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{-2+4i+4i+8}{4+16} = \frac{6+8i}{20} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10}i$. Daher ist $r = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{16}{100}} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{4\cdot 10}{10\cdot 3}\right) = \arctan\frac{4}{3}$ $= 0,93$ (1. Quadrant, auf zwei Nachkommastellen genau). Also ist $\frac{w}{z} = \frac{1}{2}e^{0,93\cdot i}$.

Lösung zu Aufgabe 32

a) Es ist $z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i + \frac{9}{2}i - \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{2}i = 6i$ $= 6e^{i90^\circ}$, also $r = 6$ und $\varphi = 90^\circ$.

b) In dem obigen Beispiel ist $|z_1| = 3$, $|z_2| = 2$ und $r = |z_1 \cdot z_2| = 6 = 3 \cdot 2$. Außerdem ist $\arg z_1 = 60°$, $\arg z_2 = 30°$ und $\varphi = \arg(z_1 \cdot z_2) = 90° = 60° + 30°$. Eine sinnvolle Vermutung für eine Rechenvorschrift ist daher: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Lösung zu Aufgabe 33

a)
- $3e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{6}} = (3 \cdot 4) \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)} = 12 \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{12}\right)} = 12 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$,
- $e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\pi} e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\pi+\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i5\pi} = e^{i\pi}$ $(= -1)$,
- $\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 \cdot 2)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ $(= 4i)$.

b) $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = \underbrace{re^{i\varphi} \cdot \ldots \cdot re^{i\varphi}}_{n-\text{mal}} = \underbrace{r \cdot \ldots \cdot r}_{n-\text{mal}}\, e^{i\overbrace{(\varphi + \ldots + \varphi)}^{n-\text{mal}}} = r^n e^{in\varphi}$

c) Die Polarformen von $1+i$ und $1-i$ werden am einfachsten mit Hilfe einer Zeichnung bestimmt. Dann gilt:
$(1+i)^6 + (1-i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 + \left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6 = 8 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} + 8 \cdot e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$
$\overset{\text{Zeichnung}}{=} -8i + 8i = 0$

d) Wir schreiben zunächst $w = se^{i\psi}$, wobei wir s und ψ bestimmen müssen.
Dann ist $w \cdot z = rs \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \overset{\text{soll}}{=} 1 \cdot e^{i\cdot 0}$.
$r \cdot s$ soll 1 sein, also muss $s = \frac{1}{r}$ sein.
$\varphi + \psi$ soll 0 sein, also muss $\psi = -\varphi$ sein.
Also ist $w = \frac{1}{r}e^{i(-\varphi)}$.

Lösung zu Aufgabe 34

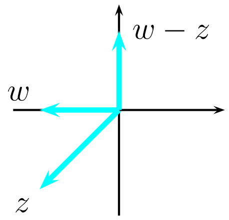
a)
- $\frac{v \cdot w}{z} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot 3e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{i\frac{\pi}{12}}} = \frac{2\cdot 3}{4}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{3}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3}{2}i$,
- $w^{-3} = \left(3e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-3} = 3^{-3}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot(-3)} = 3^{-3}e^{i\frac{-9\pi}{4}} = \frac{1}{27}e^{i\frac{7\pi}{4}}$,
- $z^2 : v^5 = \frac{\left(4e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2}{\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^5} = \frac{16e^{i\frac{\pi}{6}}}{32e^{i\frac{25\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{25\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{-24\pi}{6}} = \frac{1}{2}e^{-4\pi i} = \frac{1}{2}$,

b) Es ist $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1 = e^{i\pi}$, und für die Polarform von $\sqrt{3} - i$ errechnet man: $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Denn es ist $r = \sqrt{3+1} = 2$ und $\varphi_{TR} = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (im 4. Quadranten). Also ist $\frac{i^{10}}{(\sqrt{3}-i)^4} = \frac{e^{i\pi}}{\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^4} = \frac{e^{i\pi}}{2^4e^{-i\frac{4\pi}{6}}} = \frac{1}{16}e^{i\left(\pi-\left(-\frac{4\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{16}e^{i\frac{10\pi}{6}} = \frac{1}{16}e^{i\frac{5\pi}{3}}$. In Normalform ist das $\frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{1}{32} - i\frac{\sqrt{3}}{32}$.

c) Wir schreiben: $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Dann ist $\overline{z_1 : z_2} = \overline{(r_1 e^{i\varphi_1}) : (r_2 e^{i\varphi_2})}$ $= \overline{\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(-\varphi_1 - (-\varphi_2))} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(-\varphi_1 + \varphi_2)}$ und $\overline{z_1} : \overline{z_2} = \overline{r_1 e^{i\varphi_1}} : \overline{r_2 e^{i\varphi_2}}$ $= r_1 e^{i(-\varphi_1)} : r_2 e^{i(-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(-\varphi_1 - (-\varphi_2))} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(-\varphi_1 + \varphi_2)}$.

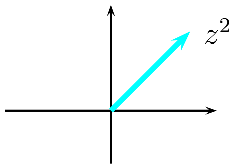
Lösung zu Lernkontrolle A

a)



Es ist $w = -\frac{1}{2}$ und $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
Außerdem ist $|w| = \frac{1}{2}$ und
$\arg(w - z) = \arg\left(\frac{1}{2} i\right) = \frac{\pi}{2}$.

b)

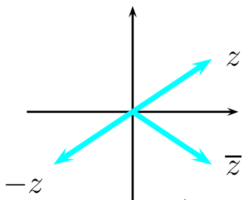


Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass $z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ist. Für z muss also gelten: $r^2 = 4$ und $2\varphi = \frac{\pi}{4}$. Eine Lösung ist daher $z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$.
Die zweite Lösung ist $z = 2e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

c) $\frac{-4i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(-4i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{-4i\sqrt{3}+4i^2)}{(\sqrt{3})^2-i^2} = \frac{-4-4i\sqrt{3})}{3+1} = -1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Also ist $\left(-\frac{-4i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} e^{i\left(\frac{16\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} e^{i\frac{17\pi}{12}}\right)^3$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^3 e^{i\frac{3\cdot 17\pi}{12}} = \frac{8}{27} e^{i\frac{17\pi}{4}} = \frac{8}{27} e^{i\frac{\pi}{4}}$. In Normalform ist das $\frac{8}{27}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $= \frac{8}{27}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right) = \frac{4}{27}\sqrt{2} + \sqrt{2}\frac{4}{27}\, i$.

Lösung zu Lernkontrolle B

a)



Die Bildung von $-z$ entspricht einer Spiegelung am Ursprung, die Bildung von $\overline{z}$ einer Spiegelung an der reellen Achse. Aus der Zeichnung liest man ab: $-z = re^{i(\varphi+\pi)}$ und $\overline{z} = re^{-i\varphi}$.

Es ist $|\pi e^{i\pi}| = \pi$ und $\arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \frac{3\pi}{4}$.

b) Der Multiplikation mit $i = e^{i\frac{\pi}{4}}$ entspricht in der Gaußschen Zahlenebene eine Drehung um $\frac{\pi}{4} = 45°$. Der Multiplikation mit $2i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ entspricht eine Drehstreckung um den Winkel $\frac{\pi}{4} = 45°$ mit dem Faktor 2.

c) $\frac{-3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} = \frac{(-3-\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}i)} = \frac{3\sqrt{3}i + (\sqrt{3})^2 i^2}{-(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{-3+3\sqrt{3}i}{3} = -1 + \sqrt{3}i$ $= 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Also ist $\left(\frac{-3+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} \cdot \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^6 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^6 = \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right)}\right)^6$ $= \left(e^{i\left(\frac{16\pi}{24} + \frac{3\pi}{24}\right)}\right)^6 = \left(e^{i\frac{19\pi}{24}}\right)^6 = e^{i\frac{6\cdot 19\pi}{24}} = e^{i\frac{19\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. In Normalform ist das $\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

Aufgaben zu Additum A

Lösung zu Aufgabe 35
Gemäß der Aufgabe definieren wir eine Zahl k, die eine Lösung der Gleichung $10^x = 0$ sein soll. Es gilt also $10^k = 0$.
Dann ist

$$10^{k+1} = 10^k \cdot 10^1 = 0 \cdot 10 = 0.$$

Da $10^k = 0$ ist, ist also

$$10^{k+1} = 10^k.$$

Logarithmieren auf beiden Seiten, bzw. Vergleichen der Exponenten ergibt

$$\begin{aligned}(k+1)\cdot\log 10 &= k\cdot\log 10, \text{ also}\\ k+1 &= k, \text{ also}\\ 1 &= 0.\end{aligned}$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch!

Lösung zu Aufgabe 36
Die erste Gleichung, $-1 = i \cdot i$, ist richtig. Wir haben i ja gerade so definiert, dass $i^2 = -1$ gelten soll.
Die zweite Gleichung ist - wenn wir die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ zulassen - ebenfalls richtig. Wir haben nur ein Symbol, nämlich i, gegen ein anderes, nämlich $\sqrt{-1}$, ersetzt.
Die Gleichung $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1}$ ist ebenfalls richtig. Denn es ist natürlich $(-1)\cdot(-1) = 1$. Also können wir das Produkt unter der Wurzel durch 1 ersetzen. $\sqrt{1} = 1$ ist ebenfalls eine richtige Gleichung.
Die einzige noch übrige Gleichung ist die Gleichung $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)}$. Nachdem an allen anderen Gleichungen nichts auszusetzen ist, muss der Fehler hier liegen.
Die Rechenregel $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ darf man also offensichtlich nicht so einfach auf negative Zahlen a und b übertragen.

Lösung zu Aufgabe 37
Nehmen wir an, es wäre $i < 0$.
Die Ungleichung $i < 0$ können wir mit i multiplizieren. Da wir ja annehmen, dass i negativ ist, ändert sich dabei das „Kleiner-Zeichen“ zu einem „Größer-Zeichen“. Also erhalten wir durch Multiplikation der Ungleichung mit i

$$i^2 > 0 \cdot i$$

und durch Ausrechnen der Produkte auf der linken, bzw. rechten Seite

$$-1 > 0.$$

Dies steht im Widerspruch zum Rechnen im Zahlbereich $\mathbb{R}$. Die Ungleichung $i < 0$ ergibt auch keinen Sinn.

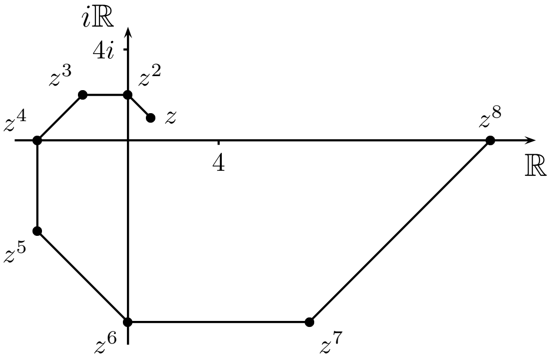
Lösung zu Aufgabe 38
Es ist beispielsweise $3 > -5$. Anschaulich bedeutet das, dass die Zahl 3 auf dem reellen Zahlenstrahl weiter rechts liegt als die Zahl -5.
Ist eine reelle Zahl größer als eine andere reelle Zahl, so bedeutet das, dass sie auf dem Zahlenstrahl weiter rechts liegt. Umgekehrt liegt eine kleinere Zahl weiter links auf dem Zahlenstrahl.
Die komplexen Zahlen liegen aber nicht nur auf einem Zahlenstrahl, sondern in der gesamten Gaußschen Zahlenebene. Hier ist die Aussage, dass eine Zahl weiter rechts als eine andere liegt, nur bedingt sinnvoll. Alle Zahlen mit gleichem Realteil liegen nämlich auf einer Geraden, und gleich weit rechts.

Aufgaben zu Additum B

Lösung zu Aufgabe 39
Die Werte sind

	Ergebnis	Betrag	Argument
z	$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
z^2	$2i$	2	$\pi/2$
z^3	$-2+2i$	$2\sqrt{2}$	$3\pi/4$
z^4	-4	4	π
z^5	$-4-4i$	$4\sqrt{2}$	$5\pi/4$
z^6	$-8i$	8	$3\pi/2$
z^7	$8-8i$	$8\sqrt{2}$	$7\pi/4$
z^8	16	16	0

In einer Skizze sieht das folgendermaßen aus:



Lösung zu Aufgabe 40
Die Spirale ist gegeben durch $w(t) = 2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}t}$, $t \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten den Betrag der Zahlen $w(t)$. Es ist $|w(t)| = 2^{\frac{t}{2}}$.
Für $t = 0$ ist $|w(0)| = 2^{\frac{0}{2}} = 2^0 = 1$.
Für negative t ist $|w(t)|$ immer kleiner als 1. Wenn t nun immer kleiner wird, dann nähert sich $|w(t)|$ immer mehr 0. So ist beispielsweise für $t = -100$ der Betrag bereits $|w(-100)| = 2^{\frac{-100}{2}} = 2^{-50} \approx 8,9 \cdot 10^{-16}$.
In der Nähe der Null windet sich also die Spirale unendlich oft um die Null und

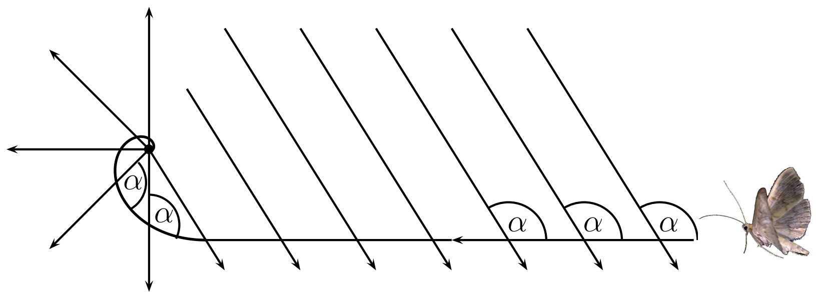
kommt ihr dabei immer näher. Allerdings erreicht sie die Null niemals. Der Betrag $|w(t)| = 2^{\frac{t}{2}}$ ist nämlich immer positiv.

Lösung zu Aufgabe 41

Die Polarform von i ist $1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Für $z = i$ ist also $w(t) = i^t = 1^t \cdot e^{i\frac{\pi}{2}\cdot t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wie sieht die Kurve aus, die dadurch entsteht?
Wir betrachten den Betrag der Zahlen $w(t)$: $|w(t)| = 1^t = 1$. Da der Betrag von $w(t)$ immer 1 ist, liegen alle Punkte $w(t)$ auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.
Das ist nicht gerade das, woran man denkt, wenn man das Wort „Spirale“ hört. Daher schließt man $z = i$ aus.
Man sieht an der Rechnung auch, dass das gleiche Problem bei allen komplexen Zahlen z auftritt, deren Betrag 1 ist. Deshalb verwendet man diese Zahlen auch nicht, um eine logarithmische Spirale zu erzeugen. Also muss gelten $|z| \neq 1$.

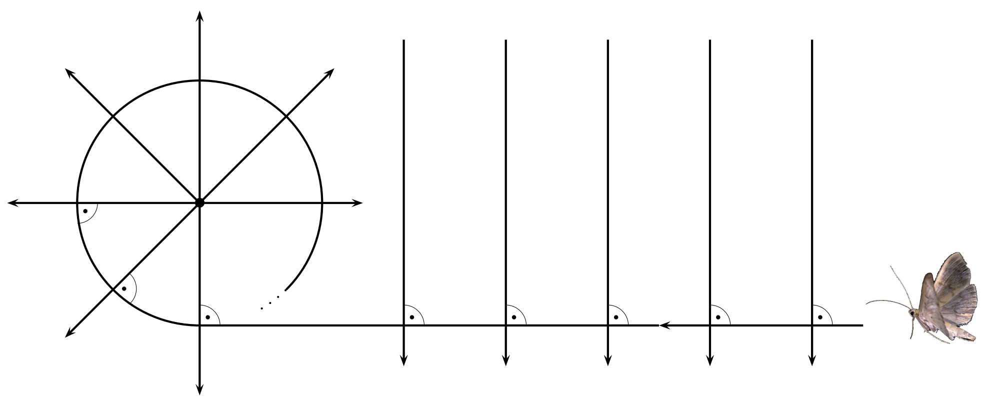
Lösung zu Aufgabe 42

Die exakte Flugbahn sieht folgendermaßen aus:

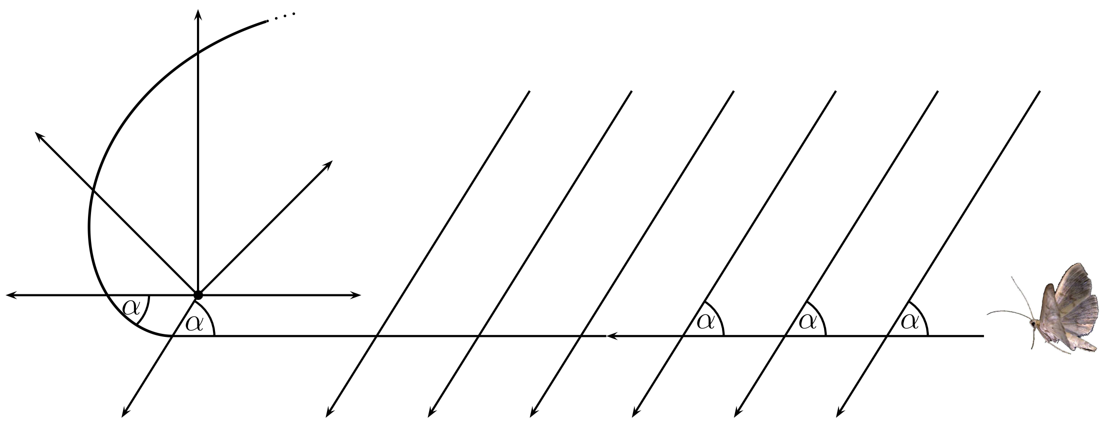


Lösung zu Aufgabe 43

a) Wenn der Flugwinkel der Motte genau 90 Grad ist, dann fliegt sie in einem Kreis um die Lichtquelle:



b) Wenn der Flugwinkel der Motte kleiner als 90 Grad ist, dann fliegt sie auf einer logarithmischen Spirale von der Lichtquelle weg:



Aufgaben zu Additum C

Lösung zu Aufgabe 44

Die Folgeglieder z_0 bis z_6 sind:

$z_0 = 2$
$z_1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$z_2 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$
$z_3 = 8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$
$z_4 = 63^2 - 1 = 3969 - 1 = 3968$
$z_5 = 3968^2 - 1 = 15745024 - 1 = 15745023$
$z_6 = 15745023^2 - 1 = 247905749270529 - 1 = 247905749270528$

Lösung zu Aufgabe 45

a) $z_0 = 0$
$z_1 = (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$
$z_2 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$
$z_3 = (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$
$z_4 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

b) $z_0 = 1 + i$
$z_1 = (1 + i)^2 - 1 = 1 + 2i - 1 - 1 = -1 + 2i$
$z_2 = (-1 + 2i)^2 - 1 = 1 - 4i - 4 - 1 = -4 - 4i$
$z_3 = (-4 - 4i)^2 - 1 = 16 + 32i - 16 - 1 = -1 + 32i$
$z_4 = (-1 + 32i)^2 - 1 = 1 - 64i - 1024 - 1 = -1024 - 64i$

c) $z_0 = \frac{1}{2}$
$z_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} = -0,75$
$z_2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16} - 1 = -\frac{7}{16} = -0,4375$
$z_3 = \left(-\frac{7}{16}\right)^2 - 1 = \frac{49}{256} - 1 = -\frac{207}{256} = -0,80859375$
$z_4 = \left(-\frac{207}{256}\right)^2 - 1 = \frac{42849}{65536} - 1 = -\frac{22687}{65536} = -0,346176147$

L 46

Lösung zu Aufgabe 46

a) $|z_0| = |0| = 0$
$|z_1| = |-1| = 1$
$|z_2| = |0| = 0$
$|z_3| = |-1| = 1$
$|z_4| = |0| = 0$

b) $|z_0| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$
$|z_1| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$
$|z_2| = |-4-4i| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$
$|z_3| = |-1+32i| = \sqrt{(-1)^2+32^2} = 5\sqrt{41} \approx 32,02$
$|z_4| = |-1024-64i| = \sqrt{(-1024)^2+(-64)^2} = 64\sqrt{257} \approx 1026,00$

c) $|z_0| = |0,5| = 0,5$
$|z_1| = |-0,75| = 0,75$
$|z_2| = |-0,4375| = 0,4375$
$|z_3| = |-0,80859375| = 0,80859375$
$|z_4| = |-0,346176147| = 0,346176147$

Literatur in der Handbibliothek

Die folgenden Bücher finden Sie in der Handbibliothek im Klassenzimmer. Sie können sie zum Nachschlagen des Gelernten benutzen. Sie finden in ihnen auch weitere Übungsaufgaben.

[Beh] Behr, Reinhart. *Ein Weg zur fraktalen Geometrie*. Stuttgart: Klett, 1989.

[Del] Deller, Henri, Peter Gebauer und Jörg Zinn. *Algebra 3. Aufgaben, Ergebnisse*. Zürich: Orell Füssli, 2000.

[Dit] Dittmann, Helmut. *Komplexe Zahlen.* München: Bayerischer Schulbuchverlag, 1976.

[Gla] Glaeser, Georg. *Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik*. Heidelberg: Spektrum, 2004.

[Hei] Heitzer, Johanna. *Spiralen. Ein Kapitel phänomenaler Mathematik*. Leipzig: Klett, 1998.

[Nie1] Niederdrenk-Felgner, Cornelia. *Komplexe Zahlen*. Themenhefte Mathematik. Stuttgart: Klett, 1985.

[Nie2] Niederdrenk-Felgner, Cornelia. *Komplexe Zahlen. Lösungsheft*. Themenhefte Mathematik. Stuttgart: Klett, 1986.

Anhang für die Lehrperson

Kapiteltests . . . 92
Lösungen zu den Kapiteltests . . . 102
Literatur . . . 108
Abbildungen . . . 109

Kapiteltest 1. Kapitel - Serie A

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 15 Minuten.

a) Wie ist die Menge $\mathbb{C}$ definiert? Antworten Sie ausführlich!

b) Berechnen Sie i^6.

c) Geben Sie Realteil und Imaginärteil der Zahl $-54i$ an.
Welche komplexe Zahl besitzt den Imaginärteil 3 und den Realteil 2?

d) „Für alle komplexen Zahlen z gilt $\mathrm{Im}(\mathrm{Re}(z)) = 0$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Zu welcher der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gehört die Zahl $-\frac{1}{2} + 0i$?

Kapiteltest 1. Kapitel - Serie B

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt.
Bearbeitungszeit ca. 15 Minuten.

a) Wie ist die imaginäre Einheit i definiert?

b) Geben Sie Realteil und Imaginärteil der Zahl $4 + i$ an.
Welche komplexe Zahl besitzt den Realteil 3 und den Imaginärteil 0?

c) Berechnen Sie $(-i)^4$.

d) „Für alle komplexen Zahlen z gilt $\mathrm{Im}(\mathrm{Im}(z)) = 0$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Zu welcher der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gehört die Zahl $\mathrm{Re}(1 + i) + \mathrm{Im}(1 + i)$?

Kapiteltest 2. Kapitel - Serie A

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 15 Minuten.

a) Berechnen Sie für $w = 2 - i$ und $z = 1 + 5i$ die folgenden Ausdrücke: $w + z$, $w - z$, $w \cdot z$, $w : z$. Berechnen Sie ferner $\frac{1}{-5i}$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{Re}\left(\overline{5 + 6i}\right)$.

c) Für welche komplexe Zahl z gilt $\dfrac{-\frac{1}{2} + 2i}{\overline{z}} + i = 2$?

d) „Für alle komplexen Zahlen z gilt $\overline{z^2} = \left(\overline{z}\right)^2$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Kapiteltest 2. Kapitel - Serie B

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt.
Bearbeitungszeit ca. 15 Minuten.

a) Berechnen Sie für $w = 1 - 3i$ und $z = 2 + 4i$ die folgenden Ausdrücke: $w + z$, $w - z$, $w \cdot z$, $w : z$. Berechnen Sie ferner $\frac{1}{7i}$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Im}\left(\overline{1 - 4i}\right)$.

c) Lässt sich 4 als Produkt von drei rein imaginären Zahlen schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zeigen Sie: Für alle komplexen Zahlen z gilt $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Kapiteltest 3. Kapitel - Serie A

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 15 Minuten.

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $4z^2 + 4z + 10 = 0$.

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -11z$.

c) Geben Sie eine möglichst einfache quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten an, die $5i$ als Lösung besitzt.

d) „Sind w und z zwei verschiedene Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffzienten, so ist $\mathrm{Im}(w) = -\mathrm{Im}(z)$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Kapiteltest 3. Kapitel - Serie B

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 15 Minuten.

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $9z^2 - 6z + 2 = 0$.

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $4z^4 = 11z^2 + 3$.

c) „Die Gleichung $z^2 - 10z + 29 = 0$ besitzt die beiden Lösungen $5 + 2i$ und $5 - 2i$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt $-5 + \frac{1}{7}i$ als Lösung. Wie lautet die zweite Lösung?

Kapiteltest 4. Kapitel - Serie A

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 20 Minuten.

a) Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in eine Gaußsche Zahlenebene ein. (Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung.)

$$w = -2i, \qquad z = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Berechnen Sie ferner $|w \cdot z|$.

b) Welche geometrische Abbildung in der Gaußschen Zahlenebene entspricht der folgenden Vorschrift: Zu jeder komplexen Zahl z wird die Zahl z^* gebildet, indem Realteil und Imaginärteil von z vertauscht werden.

c) „Für alle komplexen Zahlen z_1, z_2 gilt: $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der geometrischen Interpretation der Addition.

d) Markieren Sie in verschiedenen Farben in einer Gaußschen Zahlenebene die Menge aller Punkte z, für die gilt:

$$1 \leq |z| \leq 2, \qquad \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z), \qquad |z - i| = |z + i|.$$

Kapiteltest 4. Kapitel - Serie B

Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Hilfsmittel direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 20 Minuten.

a) Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in eine Gaußsche Zahlenebene ein. (Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung.)

$$w = 2i, \qquad z = 4 - 2i.$$

Berechnen Sie ferner $\left|\frac{z}{w}\right|$.

b) „Für alle komplexen Zahlen z gilt: $|z| = |\overline{z}|$ und $|z| = |-z|$." Ist diese Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der geometrischen Interpretation der verwendeten Operationen (d.h. Bildung der konjugiert komplexen Zahl und Bildung der entgegengesetzten Zahl).

c) Wie müssen die Zahlen z_1, z_2 liegen, damit $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ gilt? Skizzieren Sie ein Beispiel und erläutern Sie den Sachverhalt in Worten.

d) Markieren Sie in verschiedenen Farben in einer Gaußschen Zahlenebene die Menge aller Punkte z, für die gilt:

$$z \cdot \overline{z} = \frac{1}{4}, \qquad \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(\overline{z}), \qquad |z - 2| \leq |z + 1|.$$

Kapiteltest 5. Kapitel - Serie A

Lösen Sie die folgenden Aufgaben (eventuell mit Hilfe eines Taschenrechners) direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 20 Minuten.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Zeichnung die Normalform und die Polarform von $e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\pi}$.

Ermitteln Sie ferner $|e^{i\varphi}|$ (φ beliebig) und $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$.

b) Zeigen Sie; Ist z eine komplexe Zahl, so gilt $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ für alle natürlichen Zahlen n.

c) Bestimmen Sie das Ergebnis des folgenden Ausdrucks in Polar- und Normalform:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3 \cdot \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{2i}.$$

Kapiteltest 5. Kapitel - Serie B

Lösen Sie die folgenden Aufgaben (eventuell mit Hilfe eines Taschenrechners) direkt auf das Aufgabenblatt. Bearbeitungszeit ca. 20 Minuten.

a) $z_0 = 1$, z_1 und z_2 bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein gleichseitiges Dreieck mit Umkreismittelpunkt 0 und Umkreisradius 1. Bestimmen Sie z_0, z_1 und z_2 in Polarform.

Ermitteln Sie ferner $\arg(2-2i)$ und $\arg(z_0+z_1+z_2)$.

b) Mit welcher komplexen Zahl z muss eine beliebige komplexe Zahl $w = s \cdot e^{i\psi}$ multipliziert werden, damit der Zeiger von w um $45°$ gedreht und seine Länge um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt wird? (Geben Sie z auch in Normalform an.)

c) Bestimmen Sie das Ergebnis des folgenden Ausdrucks in Polar- und Normalform:

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^6 \cdot \frac{i}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}.$$

Lösungen zu Kapiteltest 1. Kapitel - Serie A

a) (K1)
$\mathbb{C}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen, also die Menge aller Zahlen der Form $a + bi$, wobei a und b reell sind.

b) (K3)
$i^6 = -1$

c) (K2)
$\mathrm{Re}(-54i) = 0$, $\mathrm{Im}(-54i) = -54$
Die komplexe Zahl mit dem Imaginärteil 3 und dem Realteil 2 ist $2 + 3i$.

d) (K4)
Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wir können $z = a + bi$ mit a, b reell schreiben. Dann ist

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Re}(z)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(a + bi)) = \mathrm{Im}(a) = 0.$$

e) (K2)
$-\frac{1}{2} + 0i \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$

Lösungen zu Kapiteltest 1. Kapitel - Serie B

a) (K1)
i ist definiert als eine Zahl, welche die Gleichung $x^2 = -1$ löst.

b) (K2)
$\mathrm{Re}(4 + i) = 4$, $\mathrm{Im}(4 + i) = 1$
Die komplexe Zahl mit dem Realteil 3 und dem Imaginärteil 0 ist 3.

c) (K3)
$(-i)^4 = 1$

d) (K4)
Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wir können $z = a + bi$ mit a, b reell schreiben. Dann ist

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Im}(z)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Im}(a + bi)) = \mathrm{Im}(b) = 0.$$

e) (K2)
$\mathrm{Re}(1 + i) + \mathrm{Im}(1 + i) = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$

Lösungen zu Kapiteltest 2. Kapitel - Serie A

a) (K2, K3)
$w + z = 3 + 4i, \quad w - z = 1 - 6i, \quad w \cdot z = 7 + 9i, \quad w : z = -\frac{3}{26} - \frac{11}{26}i$
$\frac{1}{-5i} = \frac{1}{5}i$

b) (K2)
$\mathrm{Re}\left(\overline{5 + 6i}\right) = 5$

c) (K3)
Zieht man von beiden Seiten der Gleichung i ab, so erhält man $\frac{-\frac{1}{2}+2i}{\overline{z}} = 2-i$. Dies ist gleichbedeutend mit $\overline{z} = \frac{-\frac{1}{2}+2i}{2-i} = \frac{(-\frac{1}{2}+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-1-\frac{1}{2}i+4i-2}{4+1} = \frac{-3+\frac{7}{2}i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{7}{10}i$. Also ist $z = -\frac{3}{5} - \frac{7}{10}i$.

d) (K4)
Die Aussage ist richtig.
Begründung: Es handelt sich um den Spezialfall $w = z$ in Aufgabe 15 (e).
Alternative Begründung: Wir schreiben $z = a + bi$ (a, b reell). Dann ist
$\overline{z^2} = \overline{(a + bi)^2} = \overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi$
und
$(\overline{z})^2 = \left(\overline{a + bi}\right)^2 = (a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi.$

Lösungen zu Kapiteltest 2. Kapitel - Serie B

a) (K2, K3)
$w + z = 3 + i, \quad w - z = -1 - 7i, \quad w \cdot z = 14 - 2i, \quad w : z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
$\frac{1}{7i} = -\frac{1}{7}i$

b) (K2)
$\mathrm{Im}\left(\overline{1 - 4i}\right) = 4$

c) (K4)
Die Antwort lautet: Nein.
Begründung: Das Produkt von drei rein imaginären Zahlen ai, bi, ci (a, b, c reell) ist immer rein imaginär (nämlich $-abci$). Daher kann so ein Produkt nie die reelle Zahl 4 darstellen.

d) (K4)
Wir können $z = \overline{a + bi}$ schreiben mit a, b reell. Dann ist
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+bi}\right)} = \overline{\left(\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}\right)} = \overline{\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$
und
$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{a+bi}} = \frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i.$

Lösungen zu Kapiteltest 3. Kapitel - Serie A

a) (K3)
$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$

b) (K3)
$z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm\sqrt{11}i$

c) (K4)
$z^2 = -25$

d) (K4)
Die Aussage ist richtig.
Begründung: Entweder die beiden Lösungen sind reell. Dann sind ihre Imaginärteile beide 0. Es ist also $\operatorname{Im}(w) = 0 = -0 = -\operatorname{Im}(z)$. Oder beide Lösungen sind nicht reell. Dann sind sie komplex konjugiert zueinander. Es ist also $\operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Im}(z)$.

Lösungen zu Kapiteltest 3. Kapitel - Serie B

a) (K3)
$z_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}i$

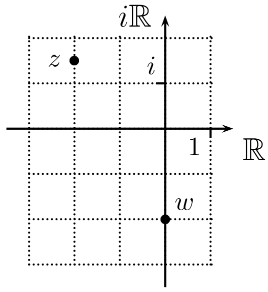
b) (K3)
$z_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $z_{3,4} = \pm\frac{1}{2}i$

c) (K4)
Die Aussage ist richtig.
Begründung: Man kann die Lösungen entweder mit Hilfe der Lösungsformel berechnen und feststellen, dass $5 \pm 2i$ die Lösungen sind. Oder man setzt $5 \pm 2i$ in die Gleichung ein und rechnet nach, dass sie die Gleichung erfüllen.

d) (K4)
Die zweite Lösung ist konjugiert komplex zu $-5+\frac{1}{7}i$. Sie lautet daher $-5-\frac{1}{7}i$.

Lösungen zu Kapiteltest 4. Kapitel - Serie A

a) (K2)

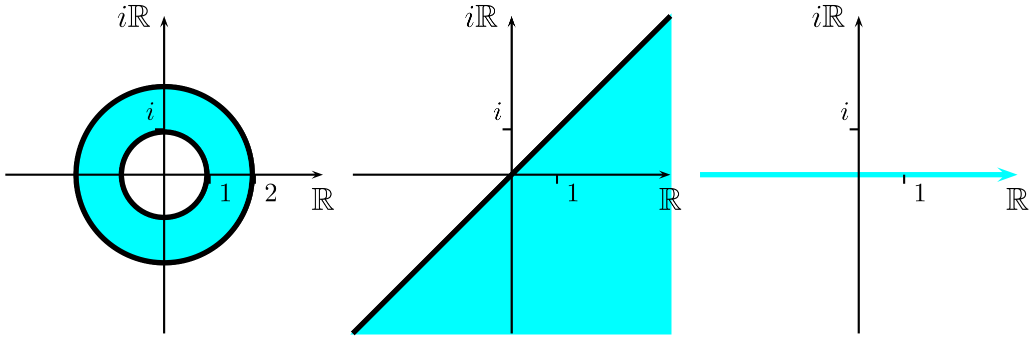


$|w \cdot z| = \left|-2i \cdot \left(-2 + \frac{3}{2}i\right)\right| = |4i - 3i^2| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16}$
$= \sqrt{25} = 5.$

b) (K3)
Die Vorschrift entspricht einer Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

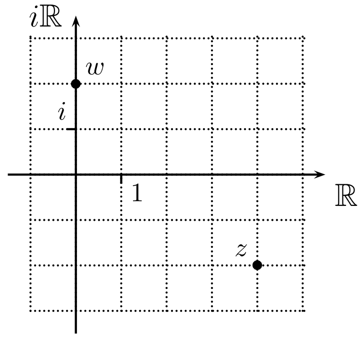
c) (K4)
Die Aussage ist falsch.
Die Addition lässt sich geometrisch als Vektoraddition interpretieren. $|z_1 + z_2|$ ist die Länge des Vektors, den man erhält, wenn man die beiden zu z_1 und z_2 gehörenden Vektoren addiert. Diese Länge ist im Allgemeinen kleiner als die Längen der einzelnen Vektoren (Dreiecksungleichung!). Die Gleichheit gilt nur dann, wenn die Vektoren in die gleiche Richtung zeigen.

d) (K3)



Lösungen zu Kapiteltest 4. Kapitel - Serie B

a) (K2)

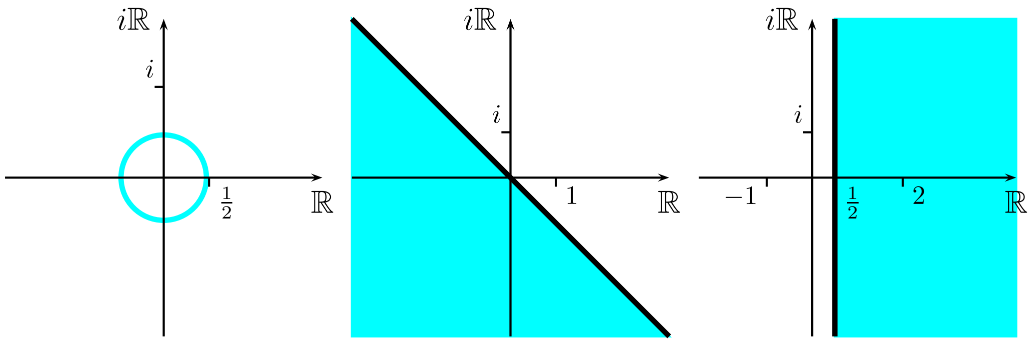


$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{4-2i}{2i}\right| = \left|\frac{2-i}{i}\right| = |(2-i)\cdot(-i)| = |-2i+i^2| = |-1-2i|$
$= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$

b) (K4)
Die Aussage ist richtig.
Dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl entspricht eine Spiegelung an der reellen Achse. Daher haben die zu z und $\overline{z}$ gehörenden Vektoren die gleiche Länge. Es gilt also $|z| = |\overline{z}|$.
Dem Bilden der entgegengesetzten Zahl entspricht eine Punktspiegelung am Ursprung. Daher haben die zu z und $-z$ gehörenden Vektoren die gleiche Länge. Es gilt also $|z| = |-z|$.

c) (K3)
Damit $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2$ gilt, muss entweder eine der beiden Zahlen Null sein, oder die zu den Zahlen gehörenden Vektoren müssen einen rechten Winkel einschließen.

d) (K3)



Lösungen zu Kapiteltest 5. Kapitel - Serie A

a) (K3)
$e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i$,
$|e^{i\varphi}| = 1$,
$\arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \arg\left(e^{i\ 2\pi}\right) = 0$.

b) (K4)
Wir schreiben $z = re^{i\varphi}$.
$\overline{z^n} = \overline{(re^{\varphi i})^n} = \overline{r^n e^{n\cdot\varphi i}} = r^n e^{-n\cdot\varphi i}$,
$\overline{z}^n = \left(\overline{re^{\varphi i}}\right)^n = \left(re^{-\varphi i}\right)^n = r^n e^{-n\cdot\varphi i}$.

c) (K3)
Es ist $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^3 = \frac{1}{8}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ und
$\frac{4+4\sqrt{3}i}{2i} = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$, also
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3 \cdot \frac{4+4\sqrt{3}i}{2i} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Lösungen zu Kapiteltest 5. Kapitel - Serie B

a) (K4)
$z_0 = e^{i\cdot 0}, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}, \quad \arg(2-2i) = \frac{7\pi}{4}$,
$\arg(z_0 + z_1 + z_2) = \arg(0)$, d.h. frei wählbar.

b) (K4)
$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$

c) (K3)
Es ist $\left(-\sqrt{3} + i\right)^6 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 = 64e^{i\pi}$ und
$\frac{i}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}i = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, also
$\left(-\sqrt{3} + i\right)^6 \cdot \frac{i}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i = 32e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Literatur

[Beh] Behr, Reinhart. *Ein Weg zur fraktalen Geometrie*. Stuttgart: Klett, 1989.

[Bin] Binz, Jany C. *Komplexe Zahlen*. Zürich: Orell Füssli, 1975.

[Del] Deller, Henri, Peter Gebauer und Jörg Zinn. *Algebra 3. Aufgaben, Ergebnisse*. Zürich: Orell Füssli, 2000.

[Dit] Dittmann, Helmut. *Komplexe Zahlen.* München: Bayerischer Schulbuchverlag, 1976.

[Gal] Gallin, Peter. „$e^{i\phi}$, oder: Das Entsetzen eines Physikers.“ *Bulletin des VSMP* **90**, Oktober 2002, 7-8.

[Gla] Glaeser, Georg. *Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik*. Heidelberg: Spektrum, 2004.

[Hei] Heitzer, Johanna. *Spiralen. Ein Kapitel phänomenaler Mathematik*. Leipzig: Klett, 1998.

[Man] Manz, Ueli. *Ein Leitprogramm zum Thema „Die komplexen Zahlen“*. Zürich: ETH Zürich, 1991.

[Nie1] Niederdrenk-Felgner, Cornelia. *Komplexe Zahlen*. Themenhefte Mathematik. Stuttgart: Klett, 1985.

[Nie2] Niederdrenk-Felgner, Cornelia. *Komplexe Zahlen. Lösungsheft*. Themenhefte Mathematik. Stuttgart: Klett, 1986.

Abbildungen

Die Abbildungen wurden folgenden Quellen entnommen:

Der Calvin-und-Hobbes-Cartoon auf der Titelseite stammt von der Internetseite
http://www.educ.utas.edu.au/users/watsonjm/tdg/articles/1998/980311a1.htm
(Übersetzung von Christina Diehl)

Die verwendeten Signets stammen von den Internetseiten
Indianer: *http://www.basics.de/pages/unternehmen/indianer.jsp*
Ziel: *http://www.trends-mobil.de/*
Ausrufezeichen: *http://web.inf.tu-dresden.de/TeI/EDA/*
Stoppschild: *http://www.fuerstenwalde-spree.de/data/firmen/elektro-pankow2.htm*
Checkliste: *http://www.chapsoft.com/ezxslt/support.html*
Pfeil: *http://www.mastny.de/Kurzreisen/html/wien.html*
Fragezeichen: *http://www.ing-nagel.ch/main.htm*
Haken: *http://www.mathekiste.de/neuv5/vollstinduk.htm*

Die Bilder der Spiralen in Additum B stammen von den Internetseiten
http://static.flickr.com/23/26554971_4f6845ed58_m.jpg
http://www.party-deko-shop.de/images/product_images/info_images/109_0.jpg
und *http://www.nassmc.org/about_images/nautilus.jpg*

Die Motte in Additum B sowie im zugehörigen Lösungsteil stammt von der Internetseite
http://www.eltima-electronic.de/bilder.html

Die Juliamengen aus Additum C stammen von den Internetseiten
http://www.alunw.freeuk.com/julia.jpg
http://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2003/shaas/julia2minus1.jpg
und *http://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2003/shaas/julia25i.jpg*

Alle übrigen Grafiken wurden von Christina Diehl mit dem pstricks-Paket von LaTeX erstellt.