
PVK MATHEMATIK I/II

HS22 / FS23

Hrvoje Krizic

Contents

1 Funktionen und Folgen	4
1.1 Nullstellen mit Polynomdivision bestimmen	4
1.2 Grenzwert von Polynom über Polynom bestimmen	5
1.3 Finde a sodass $f(x)$ stetig ist (oder andere Stetigkeits-Aufgaben)	5
1.4 Potenzreihen Konvergenzradius	6
2 Differentialrechnung	9
2.1 Ableitungen üben	9
2.2 Finde a sodass $f(x)$ monoton steigend/fallend ist	11
2.3 Finde a sodass $f(x)$ differenzierbar ist	11
2.4 Grenzwerte mit l'Hôpital	12
2.5 Taylorreihe bis zu einer gewissen Ordnung bestimmen	13
3 Integrale	15
4 Komplexe Zahlen	25
4.1 Umrechnen Polarform in Normalform und vice versa	25
4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen (v.a Division zweier komplexen Zahlen	26
4.3 Komplexe Zahlen in Ebene einzeichnen	27
4.4 n -te Wurzel berechnen	28
5 Lineare Algebra	30
5.1 Determinante berechnen (von beliebigen Matrizen mit Laplace und Sarrus)	30
5.2 Lineare Gleichungssysteme	33
5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen	38
5.4 Inverse einer 3×3 Matrix berechnen	41
6 Differentialgleichungen	44
6.1 homogene DGL 1. Ordnung lösen (mit und ohne Anfangsbedingung)	44
6.2 inhomogene DGL 1. Ordnung lösen (Variation der Konstanten, mit und ohne Anfangsbedingung)	46
6.3 homogene DGL 2. Ordnung lösen (char. Gleichung, mit und ohne Anfangsbedingung)	48
6.4 inhomogene DGL 2. Ordnung lösen (partikuläre Lösung, mit und ohne Anfangsbedingung)	49
7 Mehrdimensionale Funktionen	52
7.1 Tangentialebene Aufgaben	52
7.2 Extremwertaufgabe (ohne Nebenbedingung) lösen	52
7.3 Extremwertaufgabe (mit Nebenbedingung) lösen	53
8 Mehrdimensionale Integrale	55
8.1 Gebietsintegrale bestimmen	55

9	Vektoranalysis	57
9.1	Kurven parametrisieren	57
9.2	Kurvenintegrale über Vektorfelder lösen	58
9.3	Satz von Gauss-Green anwenden	58

1 Funktionen und Folgen

1.1 Nullstellen mit Polynomdivision bestimmen

In dieser Aufgabe ist jeweils ein Polynom gegeben. Man soll nun mithilfe der Polynomdivision die Nullstellen dieses Polynoms bestimmen. Wir gehen nach folgendem Rezept[1] vor und zeigen dies am Beispiel von $x^3 - 5x^2 - 8x + 12$:

Rezept. (Nullstellen bestimmen von Polynom n -ten Grades)

1. Errate $n - 2$ Nullstellen (Also bei einem Polynom dritten Grades musst du nur eine Nullstelle erraten). Setze dazu $x = 0, 1, -1, 2, -2$ (in dieser Reihenfolge) ein.

In unserem Beispiel setzen wir $x = 1$ ein und sehen, dass dies eine Nullstelle ist.

2. Dividiere (im Sinne der Polynomdivision) das Polynom durch das Polynom, das du erhältst, wenn du $(x - x_1)(x - x_2) \dots$ berechnest ($x_1, x_2 \dots$ sind die Nullstellen aus dem ersten Schritt).

In unserem Beispiel ist $x_1 = 1$ die bekannte Nullstelle, also teilen wir das Polynom durch $x - 1$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 5x^2 - 8x + 12) \div (x - 1) = x^2 - 4x - 12 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 -4x^2 - 8x \\
 \underline{4x^2 - 4x} \\
 -12x + 12 \\
 \underline{12x - 12} \\
 0
 \end{array}$$

3. Bestimme mithilfe der Mitternachtsformel noch die Nullstellen des entstandenen Polynoms zweiten Grades. Diese und die erratenen Nullstellen aus dem ersten Schritt sind deine Nullstellen.

Wir erhalten im Beispiel die Nullstellen für das Polynom zweiten Grades 6, -2. Mit der Nullstelle aus dem ersten Schritt haben wir also alle unsere Nullstellen gefunden:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 6$$

Falls explizit auch komplexe Zahlen erlaubt sind, so siehe weiter unten. Trotzdem können wir dann auch mit der Polynomdivision weitere Nullstellen finden. Dazu hilft folgender Satz:

Satz. Ist die komplexe Zahl z eine Nullstelle des Polynoms, so ist es auch das komplexe Konjugierte von z , also $\bar{z}$.

1.2 Grenzwert von Polynom über Polynom bestimmen

Seien zwei Polynome gegeben $p(x)$ und $q(x)$. Dann gilt folgendes:

Satz. Der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

kann berechnet werden mit der folgenden Fallunterscheidung:

1. Ist der Grad von $p(x)$ grösser als der Grad von $q(x)$, so ist der Grenzwert ∞ .
2. Ist der Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$, so ist der Grenzwert 0.
3. Ist der Grad der beiden Polynome gleich (Grad n), so ist der Grenzwert $\frac{a_n}{b_n}$ wobei a_n der Koeffizient ist von x^n in $p(x)$ und b_n der Koeffizient von x^n in $q(x)$

Als Beispiel sei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 3x + 4}$$

gegeben. Dann ist der Grad der beiden Polynome gleich 2, und somit die Lösung

$$\frac{3}{5}$$

da dies die Koeffizienten von x^2 sind.

1.3 Finde a sodass $f(x)$ stetig ist (oder andere Stetigkeits-Aufgaben)

In dieser Aufgabe ist eine Funktion der folgenden Art gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - e^{x^2} & x < 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Man soll nun a so bestimmen, dass die Funktion stetig ist in allen Punkten. Wie geht man hier vor? Man kann ohne Probleme davon ausgehen, dass die einzelnen Funktionen jeweils stetig sind. Das heisst, wir müssen nur prüfen, dass sie an den "Berührungspunkten" gleich sind (ansonsten gäbe es einen Sprung). In diesem Beispiel ist der Berührungspunkt $x = 0$ (da wo sich die beiden treffen). Dann berechnet man die beiden Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \text{Berührungspunkt}} f_1(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \text{Berührungspunkt}} f_2(x)$$

wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die beiden Teilfunktionen sind, welche sich da berühren. Um dann a zu erhalten, müssen wir die beiden Grenzwerte gleichsetzen, damit die Funktion stetig ist.

In unserem Beispiel müssen wir also die folgenden Grenzwerte berechnen und gleichsetzen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 - e^{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

wobei wir im zweiten Grenzwert l'Hopital benutzt haben. Wir setzen sie gleich und erhalten somit

$$a = 2$$

Zusammengefasst:

Rezept. (Finde a sodass $f(x)$ stetig ist)

1. Bestimme den Berührungspunkt von zwei Teil-Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
2. Berechne die Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \text{Berührungspunkt}} f_1(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \text{Berührungspunkt}} f_2(x)$$

3. Setze die beiden Grenzwerte gleich und löse nach der unbekannten Variable auf.

1.4 Potenzreihen Konvergenzradius

Beim bestimmen des Konvergenzradius einer Potenzreihen, möchten wir das Intervall

$$[x_0 - r, x_0 + r]$$

(je nachdem offene Klammern) bestimmen. Dieses Intervall gibt uns dann an, für welche x die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

konvergiert. Wir folgen dazu folgendem Rezept:

Rezept. (Bestimmung der Konvergenz von Potenzreihen)

1. Bestimme den Konvergenzradius mit der Formel:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

2. Überprüfe nun, mit direktem Einsetzen, ob die Potenzreihe mit $x = x_0 \pm r$ konvergiert oder divergiert (meistens kommt eine allgemeine harmonische bzw. alternierend harmonische Reihe vor).

3. Der Konvergenzbereich ist nun

$$(x_0 - r, x_0 + r)$$

wobei die runden Klammern zu eckigen werden, wenn im zweiten Schritt der Punkt $x_0 \pm r$ dazugezählt wird.

Um zu bestimmen, ob die Reihe bei den Grenzen konvergieren oder nicht, kannst du folgende bekannte Reihen benutzen:

Merken. 1. Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergiert für $q \in (-1, 1)$ und divergiert für alle anderen q .

2. Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert.

3. Die **verallgemeinerte harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

konvergiert für $\alpha > 1$. Für $\alpha = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe von vorhin.

4. Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

konvergiert.

Als Beispiel wollen wir den Konvergenzbereich der folgenden Reihe finden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$$

Wir gehen nach unserem Rezept vor:

1. Der Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

2. Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 1$. Die Randpunkte sind somit $x_0 \pm r = 3, -1$.
Eingesetzt ergibt dies

$$x = 3 : \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

und

$$x = -1 : \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Beide divergieren. Denn die zweite Reihe hat die Partialsummen 0 und 1, je nachdem ob wir bei einem geraden oder ungeraden Folgenglied sind. Also ist der Grenzwert undefiniert und somit die Reihe divergent.

3. Der Konvergenzbereich ist also

$$x \in (-1, 3)$$

Trick. Häufig kommen in Potenzreihen $n!$ oder a^n vor. In diesen Fällen lässt sich der Grenzwert stark kürzen:

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

und

$$\frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a}$$

2 Differentialrechnung

2.1 Ableitungen üben

Sowohl bei den Integralen, als auch bei den Ableitungen muss man zunächst einige Standardableitungen kennen. Diese werden wir hier nicht beweisen:

Merken. (Standardableitungen)

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^n &\implies f'(x) = n \cdot x^{n-1} \\
 f(x) = e^x &\implies f'(x) = e^x \\
 f(x) = \log(x) &\implies f'(x) = \frac{1}{x} \\
 f(x) = a^x &\implies f'(x) = a^x \cdot \log(a) \\
 f(x) = \sin(x) &\implies f'(x) = \cos(x) \\
 f(x) = \cos(x) &\implies f'(x) = -\sin(x) \\
 f(x) = \tan(x) &\implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:

Satz.

$$\begin{aligned}
 (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\
 (\lambda f(x))' &= \lambda f'(x) \\
 (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g + f(x) \cdot g'(x) \\
 (g(f(x)))' &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
 \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}
 \end{aligned}$$

Vor allem die Kettenregel ist sehr mühsam. Bei der Kettenregel haben wir eine sogenannte "innere Funktion" und eine "äussere Funktion". Um die gesamte Funktion abzuleiten, müssen wir zunächst bestimmen, was die innere und äussere Funktion ist. Ein Beispiel wäre

$$\log(x^2 + 1)$$

Hier ist es klar, dass $x^2 + 1$ die innere Funktion ist und $\log(x)$ die äussere. Wir berechnen nun zunächst die Ableitung der äusseren Funktion, also von $\log(x)$ und erhalten einfach $\frac{1}{x}$. Nun müssen wir die innere Funktion in diese einsetzen (also jedes x durch $g(x)$ ersetzen). Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x^2 + 1}$$

Das ganze muss dann noch mit der Ableitung der inneren Funktion $g(x)$ multipliziert werden

und wir erhalten

$$\frac{2x}{x^2 + 1}$$

Wir fassen das ganze in einem Rezept zusammen:

Rezept. (Kettenregel)

1. Herausfinden, was die äussere Funktion $f(x)$ und die innere Funktion $g(x)$ ist.
2. Äussere Funktion $f(x)$ ableiten $\implies f'(x)$.
3. Jedes x in der Ableitung der äusseren Funktion durch $g(x)$ ersetzen $\implies f'(g(x))$.
4. Multiplizieren mit der Ableitung von $g(x) \implies f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Viele Studierenden finden es schwer, Wurzeln abzuleiten und zu integrieren. Bei Wurzeln benutze immer den gleichen Trick:

Trick. Bei Wurzeln, benutze die Potenzregel

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

und nutze die Ableitungsregel

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Lass uns nun die Ableitung von

$$\sin(\sqrt{x^3})$$

berechnen. Bemerke, dass

$$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$

gilt. Wir gehen nun nach unserem Kettenregel-Rezept vor:

1. Die äussere Funktion ist $\sin(x)$, die innere ist $x^{\frac{3}{2}}$.
2. Die äussere Funktion abgeleitet ergibt $\cos(x)$.
3. Wir ersetzen das x durch unsere innere Funktion $x^{\frac{3}{2}}$, also $\cos(x^{\frac{3}{2}})$.
4. Die Ableitung von $x^{\frac{3}{2}}$ ist $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ und somit ist die gesamte Ableitung

$$\frac{3}{2} \cos(x^{\frac{3}{2}}) \sqrt{x}$$

2.2 Finde a sodass $f(x)$ monoton steigend/fallend ist

In dieser Aufgabe wird eine Funktion gegeben, beispielsweise

$$f(x) = \cos(x) - ax$$

und man soll a finden, sodass die Funktion (strikt) monoton fallend/steigend ist. In diesem Beispiel möchte man a finden, sodass $f(x)$ strikt monoton fallend ist. Dazu berechnen wir einfach die Ableitung von $f(x)$ und erhalten

$$f'(x) = -\sin(x) - a$$

Denn, Monotonie kann von der Ableitung abgelesen werden:

Merken. (Monotonie)

1. $f(x)$ ist **streng monoton steigend**, falls $f'(x) > 0$.
2. $f(x)$ ist **monoton steigend**, falls $f'(x) \geq 0$.
3. $f(x)$ ist **monoton fallend**, falls $f'(x) \leq 0$.
4. $f(x)$ ist **streng monoton fallend**, falls $f'(x) < 0$.

In unserem Fall muss also $f'(x) < 0$ gelten, und somit $-\sin(x) - a < 0$. Die Bedingung lautet also

$$a > -\sin(x)$$

Da $\sin(x) \in [-1, 1]$ kann die rechte Seite maximal $= 1$ sein und somit ist die Lösung:

$$a \in (1, \infty)$$

2.3 Finde a sodass $f(x)$ differenzierbar ist

Hier ist wieder wie bei der Stetigkeitsaufgabe eine zusammengesetzte Funktion gegeben. Wir gehen auch vor wie in der Stetigkeitsaufgabe, nur werden wir hier statt den Grenzwert einfach die Ableitung der beiden Funktionen am Berührungspunkt berechnen. Ein Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ \frac{1}{a}(x^6 + 2) & x \leq 1 \end{cases}$$

Die Frage ist, für welches a ist die Funktion differenzierbar. Dazu folgendes Rezept:

Rezept. (Finde a sodass $f(x)$ differenzierbar ist)

1. Bestimme den Berührungspunkt von zwei Teil-Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
2. Berechne die Ableitungen:

$$f'_1(x), f'_2(x)$$

und setze den Berührungspunkt ein.

3. Setze die beiden Ableitungen gleich und löse nach der unbekannten Variable auf.

In unserem Beispiel ist der Berührungspunkt $x_0 = 1$ und somit

$$f'_1(x) = 2x \implies f'_1(1) = 2$$

bzw.

$$f'_2(x) = \frac{6}{a}x^5 \implies f'_2(1) = \frac{6}{a}$$

Vergleich der beiden liefert uns die Lösung

$$2 = \frac{6}{a} \implies a = 3$$

2.4 Grenzwerte mit l'Hôpital

Wir können mithilfe von Ableitungen Grenzwerte bestimmter Funktionen sehr einfach bestimmen. Dabei muss die Funktion ein Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ sein. In diesen Fällen besagt die Regel von Bernoulli - de l'Hôpital:

Satz.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Wir gehen also nach folgendem Rezept vor:

Rezept. (Regel von Bernoulli - de l'Hôpital)

1. Berechne $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Sind beide $= 0$ oder beide $= \infty$, so kannst du mit der Regel weiterfahren. Manchmal muss die Funktion zunächst umgestellt werden (Fälle $0 \cdot \infty$, dazu mehr in den Beispielen).
2. Berechne $f'(x)$ und $g'(x)$.
3. Berechne nun $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Erhältst du wieder $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ so beginne wieder beim ersten Schritt oder versuche eine andere Methode anzuwenden.

Wir schauen uns ein paar Beispiele an:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Somit können wir die Regel von Bernoulli - de l'Hôpital anwenden und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

Auch bei Fällen der Art $f(x) \cdot g(x)$ mit Grenzwert $0 \cdot \infty$ kann l'Hôpital nützlich sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(x)$$

Wir haben nun also den Fall $0 \cdot (-\infty)$. Wir können aber x umschreiben zu $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ und somit erhalten wir

$$\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$$

was dem Fall " $\frac{-\infty}{\infty}$ " entspricht. Wir leiten beide Seiten ab und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

2.5 Taylorreihe bis zu einer gewissen Ordnung bestimmen

Taylorreihen sind nützlich um Funktionen zu approximieren. Wie berechnen wir sie?

Satz. Die Taylorreihe von $f(x)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2 \cdot 1}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

Dabei ist $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$ und $f^{(k)}(x_0)$ die k -te Ableitung mit eingesetztem Punkt x_0 . Bei jeder Ordnung kommt also ein Summand C_k dazu. Dieser Summand ist immer gegeben durch

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Muss man also die ersten 4 Ordnungen der Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ berechnen, so

gilt es $C_0, C_1, \dots, C_4$ zu berechnen und diese zu addieren. Ein Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

am Punkt $x_0 = 1$. Wir berechnen die Taylorreihe bis zur 2-ten Ordnung. Dazu berechnen wir die ersten zwei Ableitungen der Funktion und erhalten für unsere C_k :

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$C_2 = -\frac{1}{8}(x - 1)^2$$

Somit ist unsere Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung

$$1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2$$

Merken. Es ist sehr wichtig in den Ableitungen danach auch wirklich x_0 einzusetzen. Die Ableitungen dürfen nicht mehr von x abhängig sein.

3 Integrale

In der Prüfungsvorbereitung ist es am wichtigsten, gut integrieren zu üben. Denn ohne Integrale kann man auch viele Aufgaben der folgenden Kapitel nicht lösen. Im Folgenden sind alle Integrationsmethoden nochmals zusammengefasst. Bevor wir dies tun, ein kurzer Tipp:

Trick. Falls es Grenzen gibt bei den Integralen, also das Integral bestimmt ist, so soll man zuerst das unbestimmte Integral vollständig berechnen (also die Grenzen wegdenken) und ganz am Schluss die Grenzen einsetzen.

Partielle Integration

In der partiellen Integration möchten wir ein Verfahren lernen, wie wir das Integral

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

berechnen. Die partielle Integration besagt folgendes:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Da die partielle Integration häufig zu vielen Rechenfehlern führt, möchten wir hier die DI-Methode wiederholen. Diese ist sehr praktisch und man betrachtet dabei drei Fälle der partiellen Integration.

DI-Methode

Bei der partiellen Integration brauchen wir eine Funktion die leicht zu integrieren ist, und eine Funktion, die wir leicht ableiten können. Welches der Funktionen wir für was wählen sollten, ist durch keine Regel bestimmt. Hilfreich kann jedoch folgende Faustregel sein, welche in fast allen Fällen funktioniert:

Merken. (für partielle Integration)

Kürzel	Funktionen-Typ	Beispiele
L	logarithmisch	$\ln x, \log_{10} x$
A	algebraisch	$x^n, x^5 + x + 1$
T	trigonometrisch	$\sin x, \cos x$
E	exponentiell	$e^x, e^{-x}, 8^x$

Je weiter oben die Funktion in dieser Tabelle ist, desto eher sollte man sie **ableiten**. Wir merken uns also **LATE**, zur Bestimmung, welche Funktion abgeleitet wird und welche integriert.

Wie funktioniert nun die DI-Methode? Wir zeichnen uns zunächst folgende Tabelle auf

D	I
+	
-	
+	
-	
+	

Nun schreibt man in die Spalte von "D" in die erste Zeile die Funktion hin, welche wir ableiten wollen und in die Spalte "I" die Funktion, die wir integrieren wollen. Beispielsweise für das Integral

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

sieht die Tabelle wie folgt aus

D	I
+ x^2	$\cos x$
-	
+	
-	
+	

Nun wird Zeile für Zeile die Funktion bei D abgeleitet und bei I jeweils integriert. Wir erhalten in unserem Beispiel

D	I
+ x^2	$\cos x$
- $2x$	$\sin x$
+ 2	$-\cos x$
- 0	$-\sin x$
+ $\vdots$	$\vdots$

Wir schauen uns nun verschiedene Fälle der DI-Methode an.

1. Fall: Ableitung ist in einer Zeile 0

Wenn in einer Zeile auf einmal eine Zeile auf der D-Seite $= 0$ ist, so können wir dort aufhören (schreiben aber noch die Zeile mit der 0 hin!). Dies ist der Fall im Beispiel von oben. Wir finden auf der vierten Zeile eine 0 in der Ableitung. Ist das erreicht, kann die Lösung abgelesen werden. Wir wählen dabei für die Ableitung das Vorzeichen der Tabelle und erhalten mit überkreuzt multiplizieren die Lösung. Wir gehen also wie folgt vor:

Rezept. (DI-Methode mit Ableitung 0)

1. Wir packen die Vorzeichen auf unsere Ableitungen:

	D	I		D	I
+	x^2	$\cos x$		x^2	$\cos x$
-	$2x$	$\sin x$	$\longrightarrow$	$-2x$	$\sin x$
+	2	$-\cos x$		2	$-\cos x$
-	0	$-\sin x$		0	$-\sin x$

2. Nun nehmen wir die erste Zeile von D und multiplizieren diese mit der zweiten Zeile von I. Dann addieren wir dazu die zweite Zeile von D mal die dritte Zeile von I und so weiter, bis wir die 0-Zeile erreicht haben (also die Zeile, in der bei der Ableitung eine 0 steht).

D	I
x^2	$\cos x$
$-2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

Wir erhalten in unserem Beispiel

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x + (-2x)(-\cos(x)) + 2 \cdot (-\sin x) \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.\end{aligned}$$

2. Fall: Eine Zeile kann integriert werden

Wir nehmen nun als Beispiel folgendes Integral:

$$\int x^4 \ln x \, dx.$$

Wir können nun wieder unsere DI-Methode anwenden und leiten diesmal $\ln x$ ab und integrieren x^4 . Dann ist die Tabelle gegeben durch

	D	I
+	$\ln x$	x^4
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}x^5$
+	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{30}x^6$

Wir sehen, dass wir in diesem Falle nie die 0 erreichen. Wir müssen nun also anders vorgehen. Wenn wir sehen, dass eine Zeile aber als Multiplikation integrierbar ist (in unserem Fall die zweite Zeile), so können wir auch folgendes Rezept verwenden.

Rezept. (DI-Methode mit integrierbare Zeile)

1. Wir packen die Vorzeichen auf unsere Ableitungen:

$$\begin{array}{cc|c} & D & I \\ \hline + & \ln x & x^4 \\ - & \frac{1}{x} & \frac{1}{5}x^5 \\ + & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{30}x^6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} & D & I \\ \hline & \ln x & x^4 \\ & -\frac{1}{x} & \frac{1}{5}x^5 \\ & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{30}x^6 \end{array}$$

2. Nun nehmen wir die erste Zeile von D und multiplizieren diese mit der zweiten Zeile von I. Dann addieren wir dazu die zweite Zeile von D mal die dritte Zeile von I und so weiter, bis wir eine Zeile erreicht haben, welche wir integrieren können (also die Zeile, in der der Eintrag von D multipliziert mit dem Eintrag in I ein einfaches Integral ergibt).

$$\begin{array}{cc|c} & D & I \\ \hline & \ln x & x^4 \\ & -\frac{1}{x} & \frac{1}{5}x^5 \end{array}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{1}{5}x^5 + \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{5}x^5 \, dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \int \frac{x^4}{5} \, dx \\ &= \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{1}{25}x^5 + C. \end{aligned}$$

3. Fall: Eine Zeile wiederholt sich

Nun wollen wir noch den letzten Fall anschauen und nehmen als Beispiel das Integral

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Wir stellen wieder unsere Tabelle auf und leiten $\sin x$ ab und e^x integrieren wir.

$$\begin{array}{cc|c} & D & I \\ \hline + & \sin x & e^x \\ - & \cos x & e^x \\ + & -\sin x & e^x \end{array}$$

Wieder können wir die 0 nie erreichen. Wir sehen aber, dass die dritte Zeile im Wesentlichen der ersten Zeile entspricht (bis auf das Vorzeichen). Falls dies geschieht, können wir die letzte Methode verwenden:

Rezept. (DI-Methode mit wiederholte Zeile)

1. Wir packen die Vorzeichen auf unsere Ableitungen:

$$\begin{array}{cc|c} \text{D} & & \text{I} \\ \hline + & \sin x & e^x \\ - & \cos x & e^x \\ + & -\sin x & e^x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} \text{D} & & \text{I} \\ \hline & \sin x & e^x \\ & -\cos x & e^x \\ & -\sin x & e^x \end{array}$$

2. Wir gehen vor wie im zweiten Fall (eine Zeile lässt sich integrieren). Wir wählen nur nicht die Zeile aus, die sich am einfachsten integrieren lässt, sondern die, welche sich wiederholt.

$$\begin{array}{cc|c} \text{D} & & \text{I} \\ \hline \sin x & & e^x \\ -\cos x & & e^x \\ -\sin x & & e^x \end{array}$$

Wir erhalten also

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x + (-\cos x) \cdot e^x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Wir können unser Integral nun als eine Variable definieren, beispielsweise

$$I = \int e^x \sin x \, dx.$$

Dann gilt

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I.$$

Wir stellen dann nach I um und erhalten die gewünschte Lösung:

$$\begin{aligned} 2I &= e^x \sin x - e^x \cos x \\ I &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \end{aligned}$$

Wir merken uns also folgendes:

Merken. In allen Fällen können wir jeweils Diagonalen zusammenaddieren. Sobald wir zu einer Zeile gelangen wo eine Null steht, kann aufgehört werden. Kommt es nicht zu einer Null, so kann eine Zeile (nicht Diagonale) zusätzlich als Integral geschrieben und zu den Diagonalen addiert werden (Zeilenstopp). Achtung: die Zeile die wir integrieren ist die Zeile wo die letzte Diagonale endet.

Substitution

Eine weitere Möglichkeit eine Stammfunktion zu erhalten ist die sogenannte Substitution. Ist ein Integral der folgenden Form gegeben

$$\int f(g(x)) dx,$$

so können wir $u = g(x)$ substituieren und erhalten dann als Lösung

$$\int \frac{f(u)}{u'} du,$$

mit $u' = \frac{du}{dx}$. Wir wollen dies gleich an einem Beispiel ausprobieren.

Ein Beispiel: wir berechnen

$$\int \sqrt{3x} dx$$

Wir kennen die Funktion $\sqrt{x}$ und wissen, dass

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

gilt (folgt aus x^s integrieren von den Standardintegralen). Wir sehen nun aber, dass das zu berechnende Integral genau dieses Integral ist, jedoch die Funktion $3x$ in ihr verschachtelt ist. Es gilt also $g(x) = 3x$. Somit wählen wir die Substitution $u = 3x$ und erhalten $u' = 3$. Es gilt also

$$\int \sqrt{3x} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{2}{9} u^{3/2} + C.$$

Schlussendlich können wir dann wieder rücksostituieren indem wir wieder für das u unser $3x$ einsetzen. Wir erhalten also als endgültige Lösung

$$\int \sqrt{3x} dx = \frac{2}{9} (3x)^{3/2} + C.$$

Nun schauen wir uns folgendes Integral an: Berechne

$$\int x \sin(x^2 + 1) dx$$

Wir kennen die Funktion $\sin x$ und wissen, dass

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

gilt. Wir sehen nun aber, dass im zu berechnenden Integral genau dieses Integral vorkommt, jedoch die Funktion $x^2 + 1$ in ihr verschachtelt ist. Es gilt also $g(x) = x^2 + 1$. Somit wählen wir die Substitution $u = x^2 + 1$ und erhalten $u' = 2x$. Es gilt also

$$\int x \sin(x^2 + 1) dx = \int \frac{x}{2x} \sin u du = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C.$$

Schlussendlich können wir dann wieder rücksostituieren indem wir wieder für das u unser $x^2 + 1$ einsetzen. Wir erhalten also die endgültige Lösung

$$\int x \sin x^2 + 1 \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C.$$

Wieso haben wir keine partielle Integration gebraucht? Grund dafür ist, dass die Ableitung der verschachtelten inneren Funktion im Integral ungefähr vorkommt. Das x wird ja mit dem $\sin()$ multipliziert. Da wir aber bei der Substitution durch unsere Ableitung ($2x$) teilen, wird dieses x weggekürzt. Merke dir:

Merken. Denke immer zuerst an Substitution bevor du partiell integrierst. Wenn die Ableitung einer verschachtelten Funktion in irgendeiner Weise vorkommt, kann es sein, dass gekürzt werden kann nach dem substituieren.

Ein weiteres Beispiel eines solchen Integrals wäre

$$\int \frac{x^3}{x^4 + 5} \, dx$$

Hier können wir $x^4 + 5$ substituieren, da x^3 ja so gut wie die Ableitung von $x^4 + 5$ ist und dadurch weggekürzt wird, denn $u = x^4 + 5$ und somit $u' = 4x^3$ führt zum Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x^3} \frac{x^3}{u} \, du &= \int \frac{1}{4} \frac{1}{u} \, du \\ &= \frac{1}{4} \log(u) + C = \frac{1}{4} \log(x^4 + 5) + C \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

Koeffizientenvergleich

Der Koeffizientenvergleich ist eine Methode in der Mathematik, wo man Unbekannte durch Vergleich von Koeffizienten (von $x, x^2, \dots$) findet. Sei beispielsweise folgendes Polynom gegeben:

$$p(x) = A(x - 1) + B(x - 3) + Cx^2$$

Wir wollen nun A, B, C so finden, dass dieses Polynom dem folgenden Polynom entspricht:

$$q(x) = 3x^2 + x + 1$$

Dazu bringen wir das Polynom $p(x)$ und das Polynom $q(x)$ in die folgende Form:

$$x^2 \cdot (\dots) + x \cdot (\dots) + \dots$$

Wir führen also alle Koeffizienten von x^2 , x und den Rest zusammen. Für $p(x)$ wäre dies also

$$p(x) = x^2 \cdot (C) + x \cdot (A + B) - A - 3B$$

und für $q(x)$:

$$q(x) = x^2 \cdot (3) + x \cdot (1) + 1$$

Stellen wir diese beiden nun gleich, können wir schon erkennen, was wir als Nächstes machen müssen:

$$x^2 \cdot (C) + x \cdot (A + B) - A - 3B = x^2 \cdot (3) + x \cdot (1) + 1$$

Die Koeffizienten von x^2 , x , und der Rest müssen übereinstimmen. Wir erhalten also ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C &= 3 \\ A + B &= 1 \\ -A - 3B &= 1 \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Gleichung ergibt $A = 1 - B$ und einsetzen in die dritte Gleichung ergibt

$$-1 - 2B = 1 \implies B = -1$$

und somit ist unsere Lösung

$$A = 2 \quad B = -1 \quad C = 3$$

Integrale mit Partialbruchzerlegung

Sei nun ein Integral der Form

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

gegeben, wobei $f(x)$ und $g(x)$ Polynome sind und $g(x)$ komplett in Linearfaktoren zerlegt werden kann, also $g(x)$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$g(x) = (x - \dots) \cdot (x - \dots) \cdot \dots \cdot (x - \dots).$$

Ein Beispiel eines solchen Integrals wäre

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx.$$

Wir gehen nun nach folgendem Rezept vor

Rezept. (Partialbruchzerlegung)

1. Faktorisiere den Nenner in $g(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k)$. In unserem Beispiel also

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

2. Schreibe nun folgende Summe hin

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots$$

mit $A, B, \dots$ Konstanten. Falls ein Linearfaktor eine Potenz $k \geq 2$ hat, so muss jede einzelne Potenz von ihm summiert werden. Beispielsweise für $g(x) = (x - 2)^2(x + 1)$ müssen wir folgende Summe hinschreiben:

$$\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

In unserem Beispiel aber erhalten wir

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

3. Bringe die Summe auf einen Nenner $(x - x_1) \dots (x - x_k)$, also in unserem Beispiel

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

4. Setze nun den Zähler gleich $f(x)$ (also dem Zähler aus dem Integral) und löse mit Koeffizientenvergleich nach A und B auf. Für unser Beispiel erhalten wir

$$\begin{aligned} A(x - 2) + B(x - 1) &= x + 1 \\ \implies x(A + B) - 2A - B &= x + 1 \\ \implies A + B = 1, \quad -2A - B &= 1 \\ \implies A = -2, \quad B &= 3. \end{aligned}$$

5. Die Lösung ist nun gegeben durch

$$\int \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots dx,$$

beziehungsweise in unserem Beispiel

$$\int \frac{-2}{x - 1} + \frac{3}{x - 2} dx = -2 \ln |x - 1| + 3 \ln |x - 2| + C,$$

wobei wir das Integral in zwei Integrale aufgespalten haben und eine kleine Substitution jeweils durchgeführt haben.

Hierfür ein kleiner Shortcut, der in die Formelsammlung gehört:

Trick. Man ist deutlich schneller, wenn man sich einfach merkt, dass

$$\int \frac{a}{x - x_i} dx = a \ln(x - x_i) + C$$

mit $a \in \mathbb{R}$ gilt (Wieso? Gute Übung dies kurz zu zeigen)

4 Komplexe Zahlen

4.1 Umrechnen Polarform in Normalform und vice versa

Wir können komplexe Zahlen entweder durch Real- (x) und Imaginärteil (y) ausdrücken:

$$z = x + iy$$

oder aber mithilfe des Abstandes r zum Koordinatenursprung zur komplexen Zahl und dem Polarwinkel zur x -Achse φ :

$$z = re^{i\varphi}$$

Wie rechnen wir das eine in das andere um?

Rezept. (Umrechnung von Normalform zur Polarform einer komplexen Zahl $z = x + iy$)

1. Wir bestimmen zunächst den Radius der komplexen Zahl mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Nun bestimmen wir den Winkel φ , den die komplexe Zahl mit der reellen Achse bildet. Wir betrachten hierbei zwei Fälle.
 - (a) z liegt im 1. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$
 - (b) z liegt im 2. oder 3. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$
 - (c) z liegt im 4. Quadranten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi$

Im Sonderfall von $x = 0$ gilt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $y > 0$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $y < 0$.

3. Wir schreiben nun $z = re^{i\varphi}$ mit den aus den Schritten 1 und 2 bestimmten Parameter.

$\arctan(x)$ -Werte können von folgender Tabelle abgelesen werden:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

wobei zu beachten ist, dass $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.

Die Umrechnung von Polarform zur Normalform erfolgt durch das Anwenden der Eulerschen Formel.

Merken. Sei also $z = re^{i\varphi}$ die Polarform der komplexen Zahl. Dann gilt

$$z = r \cos(\varphi) + i \cdot r \sin(\varphi).$$

4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen (v.a Division zweier komplexen Zahlen)

Addition und Subtraktion sollte klar sein. Multiplikation von zwei komplexen Zahlen funktioniert genau gleich wie bei reellen, wobei man i als "Variable" sieht, welches den "special effect" hat, dass $i^2 = -1$ gilt.

Merken. Für Potenzen, beispielsweise

$$(1 + 2i)^4$$

immer zuerst die komplexe Zahl in Polarform umwandeln und dann potenzieren, denn es gilt

$$z = re^{i\varphi} \implies z^n = r^n e^{in\varphi}$$

In unserem Beispiel erhält man $z^4 = -7 - 24i$ (Versuche dies zu zeigen!) mit $z = 1 + 2i$.

Zur Division benutzen wir folgendes Rezept:

Rezept. (Division zweier komplexen Zahlen $\frac{z_1}{z_2}$)

1. Multipliziere sowohl Zähler als auch Nenner mit dem komplex Konjugierten des Nenners.
2. Du erhältst nun im Nenner (wegen der Beziehung, welche wir hergeleitet haben) $|z_2|^2$.
3. Führe den Zähler auf die Form $a + ib$ zurück. Du erhältst nun $\frac{a+ib}{|z_2|^2}$
4. Wir können nun den Bruch in zwei Teile teilen (einen Realteil und Imaginärteil) und erhalten $\frac{a}{|z_2|^2} + i \frac{b}{|z_2|^2}$

Wir wollen nun dieses Verfahren anhand eines Beispiels anwenden. Wir wollen beispielsweise $\frac{3+i}{3-i}$ "berechnen". Mit dem Rezept erhalten wir:

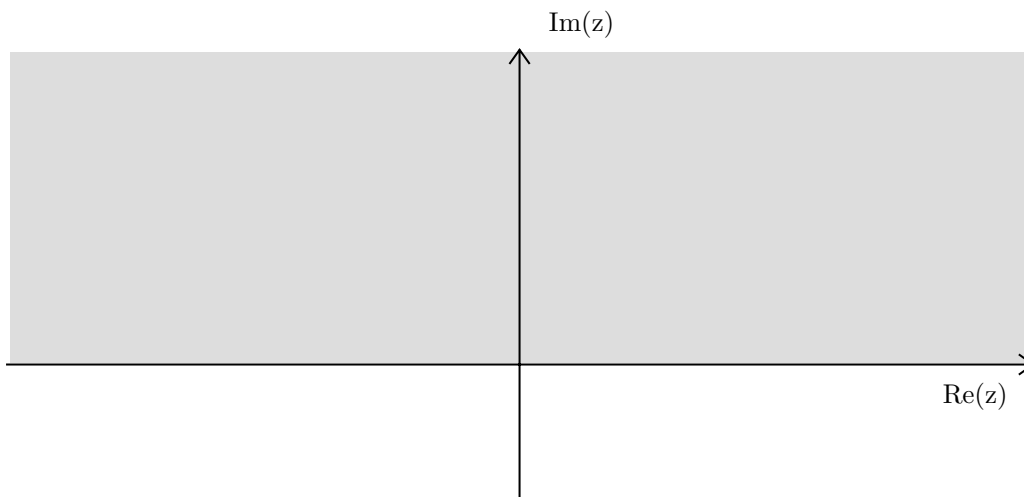
$$\begin{aligned} \frac{3+i}{3-i} &= \frac{(3+i) \cdot (3+i)}{(3-i) \cdot (3+i)} \\ &= \frac{3^2 + 6i + i^2}{3^2 + 1^2} \\ &= \frac{8 + 6i}{10} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

4.3 Komplexe Zahlen in Ebene einzeichnen

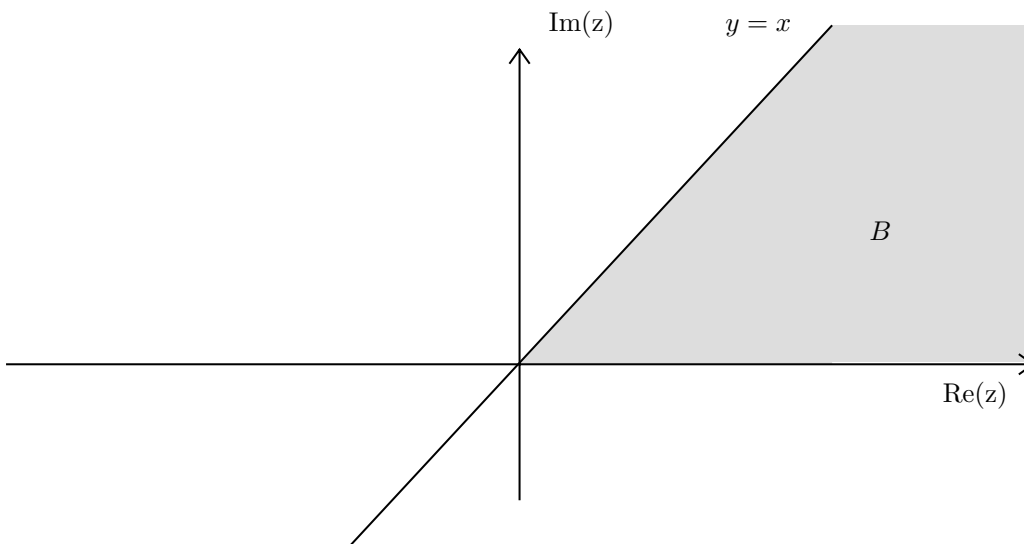
In dieser Aufgabe wird eine Menge gegeben, beispielsweise

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\}$$

Hier kann man $\operatorname{Im}(z)$ durch y ersetzen und $\operatorname{Re}(z)$ durch x . Dann zeichnet man Bedingung für Bedingung ein. Zunächst also $y > 0$, das heisst y ist immer positiv und wir befinden uns auf der oberen Halbebene:



Nun kommt hinzu, dass $x > y$. Das heisst, wir möchten alle Punkte, die einen grösseren x -Wert haben, als y . Das sind genau alle Punkte unter der Geraden $y = x$. Und somit ist die gesuchte Menge die folgende:



Zusammengefasst kann man also nur Folgendes sagen:

Trick. $\text{Im}(z) \rightarrow y$ und $\text{Re}(z) \rightarrow x$ umwandeln und der Reihe nach die Flächen aufzeichnen. Üben, üben, üben!

4.4 n -te Wurzel berechnen

Da komplexe Zahlen nicht eindeutig sind, können wir sie in Abhängigkeit eines Parameters schreiben

$$z = r^{i(\varphi+2\pi k)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Denn egal wie häufig wir um den Kreis gehen (also eine 2π Drehung machen beim Polarwinkel) kommen wir zur gleichen komplexen Zahl zurück. Bis jetzt war das noch egal. Bei den Wurzeln wird dies aber sehr wichtig sein. Denn wenn wir beispielsweise folgende Gleichung haben

$$z^3 = -1$$

dann muss dies wegen dem Fundamentalsatz 3 Lösungen haben:

Satz. Jedes Polynom vom Grad n

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ mit } a_k \in \mathbb{C}$$

hat genau n komplexe Nullstellen.

Wir gehen nach folgendem Rezept vor:

Rezept. (n -te Wurzel ziehen: $z^n = w$)

1. Schreibe w (also die rechte Seite) in Polarform.
2. Füge zum Winkel φ einen Summand $+2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hinzu:

$$w = r e^{i(\varphi+2\pi k)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Nehme die n -te Wurzel davon: zuerst n -te Wurzel von r berechnen und dann die Potenz von e durch n teilen:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k)}$$

4. Setze nun für k die Werte 0 bis $n - 1$ ein und erhalte insgesamt n Lösungen.

Ein Beispiel: Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = i.$$

Aus der Gleichung muss $z = \sqrt[3]{i}$ gelten. Es gibt also drei Lösungen dieser Gleichung. In

Polarform gilt $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$. Somit gilt

$$z = \sqrt[3]{i} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k)}.$$

Wir finden für $k \in \{0, 1, 2\}$ dann folgende Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}} & (k=0) \\ z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{6}} & (k=1) \\ z_3 &= e^{i\frac{9\pi}{6}} & (k=2) \end{aligned}$$

5 Lineare Algebra

5.1 Determinante berechnen (von beliebigen Matrizen mit Laplace und Sarrus)

2×2 -Matrizen

Bei 2×2 -Matrizen ist die Determinante gegeben durch folgende Formel:

Satz.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \det(A) = ad - bc$$

3×3 -Matrizen

Nun widmen wir uns der 3×3 Matrix, dort haben wir das sogenannte Sarrus verfahren:

$$\begin{array}{ccccc}
 & + & & + & & + & & & \\
 a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \cdots & a_{11} & & a_{12} \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
 a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \cdots & a_{21} & & a_{22} \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \diagup & \\
 a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \cdots & a_{31} & & a_{32} \\
 & - & & - & & - & & - &
 \end{array}$$

Die Vorgehensweise ist wie folgt: Man bildet Produkte von je 3 Zahlen, die durch die schrägen Linien verbunden sind. Dann werden die von links oben nach rechts unten verlaufenden Produkte addiert und davon die von links unten nach rechts oben verlaufenden Produkte subtrahiert. Alles zusammen ergibt dann die Determinante. Wir wollen dies am Beispiel von vorhin demonstrieren. Wir bestimmen also die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir führen die Regel von Sarrus aus. Dabei schreiben wir die Matrix mit den ersten zwei Spalten doppelt hin

$$\begin{array}{ccccc}
 & + & & + & & + & & & \\
 0 & & 1 & & 1 & \cdots & 0 & & 1 \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
 1 & & 1 & & 1 & \cdots & 1 & & 1 \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \diagup & \\
 2 & & -1 & & 1 & \cdots & 2 & & -1 \\
 & - & & - & & - & & - &
 \end{array}$$

Nun bilden wir jeweils die Produkte und addieren zunächst die von links oben nach rechts unten verlaufenden Produkte, und dann subtrahieren wir die von links unten nach rechts

oben verlaufenden Produkte.

$$\det(A) = 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Die roten Zahlen sind dabei die Diagonalen von links oben nach rechts unten und die blauen die von links unten nach rechts oben. Wir erhalten

$$\det(A) = 0 + 2 + (-1) - 2 - 0 - 1 = -2$$

Beliebige Matrizen (auch 3×3)

Wir gehen hier nach folgendem Rezept (nächste Seite) vor und benutzen als Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rezept. (Laplace'scher Entwicklungssatz)

1. Man wähle die Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen aus und schreibt sie mit grossen Abständen hin. In unserem Fall nehmen wir uns die zweite Zeile und schreiben sie hin:

$$\det(A) = 2 \quad 0 \quad 1$$

2. Rechts neben jede Zahl kommt jetzt die Determinante der Matrix hin, die übrig bleibt, wenn wir eine "Bomberman"-Bombe auf die Zahl platzieren. Beispielsweise bei der 2 bleibt die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

übrig, da wenn wir eine Bombe auf die 2 platzieren, die erste Spalte und die zweite Zeile gelöscht werden. Bei der 0 haben wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

und bei der 1 die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten davon kommen jeweils links zur Zahl hin:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \quad \quad 0 \cdot (-8) \quad \quad 1 \cdot (-6) \end{aligned}$$

3. Die Vorzeichen (ob addiert oder subtrahiert wird) entnehmen wir dem Schachbrettmuster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

und schreiben das Vorzeichen vor die Zahlen. Die Determinante ist die Lösung dieser Rechnung

$$\det(A) = -2 \cdot 2 + 0 \cdot (-8) - 1 \cdot (-6) = 2$$

5.2 Lineare Gleichungssysteme

Gauss-Verfahren

Ein Gleichungssystem kann in der Mathematik umgeschrieben werden in die folgende Gleichung:

$$Ax = c$$

Dabei ist x der zu suchende Vektor und A die Koeffizientenmatrix. c ist der Lösungsvektor. Wie lösen wir ein solches lineares Gleichungssystem? Dazu benutzen wir das sogenannte Gauss-Verfahren:

Rezept. (Gauss-Verfahren)

1. Alle Gleichungen müssen zuerst in einer Matrix aufgeschrieben werden. Dazu werden alle Koeffizienten und die Lösungen (rechten Seiten der Gleichungen) in einer Zeile aufgeschrieben. Wichtig dabei ist, dass die Gleichung schon in der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots = d$ ist.

$$a \cdot x + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + \dots = d \implies \left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & \dots & d \end{array} \right)$$

2. Anschliessend muss die Matrix mit Zeilenoperationen auf die Zeilenstufenform gebracht werden. Dazu dürfen folgende drei Operationen verwendet werden:
 - (a) Zeilen vertauschen
 - (b) Eine Zeile mit einem beliebigen Wert multiplizieren
 - (c) Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile dazu addieren

Möchten wir eine 0 im ersten Eintrag, benützen wir die erste Zeile um das zu erreichen. Möchten wir eine 0 im zweiten Eintrag, benützen wir die zweite Gleichung etc.

3. Haben wir die Zeilenstufenform erreicht, beginnen wir mit der letzten Zeile und formen diese wieder in eine Gleichung um. Es sollte nun nur noch eine Unbekannte da sein. Wir arbeiten uns dann nach oben, in dem wir jeweils die Zeile in eine Gleichung umschreiben und dann die schon gefundenen Unbekannten einsetzen.

Ein Beispiel: Man bestimme die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - 1 \\ 4x_2 &= 3x_1 + 6 \end{aligned}$$

Wir formen das Gleichungssystem zunächst um, sodass wir Gleichungen der Form $ax_1 + bx_2 =$

c haben, also

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= -1 \\ -3x_1 + 4x_2 &= 6\end{aligned}$$

Wir gehen nun Schritt für Schritt wie im Rezept vor

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist gegeben durch

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

2. Nun bringen wir die Matrix in Zeilenstufenform. Dabei muss der erste Eintrag in der zweiten Zeile 0 sein. Wir können einfach das dreifache der ersten Zeile zur zweiten Zeile dazuaddieren, also $L_2 + 3L_1 \hookrightarrow L_2$. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 + 3 \cdot L_1 \hookrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

3. Die letzte Zeile liefert uns die Gleichung

$$x_2 = 3$$

Nun folgt aus der ersten Zeile die Gleichung

$$x_1 - x_2 = -1$$

Mit einsetzen von $x_2 = 3$ liefert diese Gleichung $x_1 = 2$ und somit die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Abschnitt lernen wir noch ein alternatives Verfahren kennen.

Harry-Verfahren

Rezept. (Alternatives Verfahren zu Gauss)

1. Schreibe ein System neben das gegebene Gleichungssystem mit der gleichen ersten Zeile und lauter Nullen in der ersten Spalte unter dem Diagonalelement (**Pivot**). Die anderen Einträge lässt du frei:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

2. Dort wo die Einträge fehlen zurzeit, beginnst du ganz oben links. Das Element bildet in unserem ursprünglichen Gleichungssystem ein Rechteck mit dem ersten Pivotelement (in unserem Fall ganz oben links die 2). Die Ecken dieses Rechtecks bilden eine 2×2 -Matrix, dessen Determinante dann in das leere Feld kommt. Also:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Gehe nun so auch für die anderen 5 Elemente vor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

- 3. Nun wiederholen wir Schritt 1 und Schritt 2, indem wir uns die erste Spalte und Zeile einfach wegdenken. Das neue Pivotelement in unserem Fall ist jetzt also 1. Der erste Schritt ist es wieder, unter dem Pivotelement Nullen hinzuschreiben und den Rest frei zu lassen, also:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der zweite Schritt ist dann wieder, die leeren Felder mit den dazugehörigen Determinanten zu füllen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Dies ist das fertige System in Zeilenstufenform. Das Vorgehen um die Unbekannten nun zu bestimmen ist das Gleiche wie beim Gauss-Verfahren.

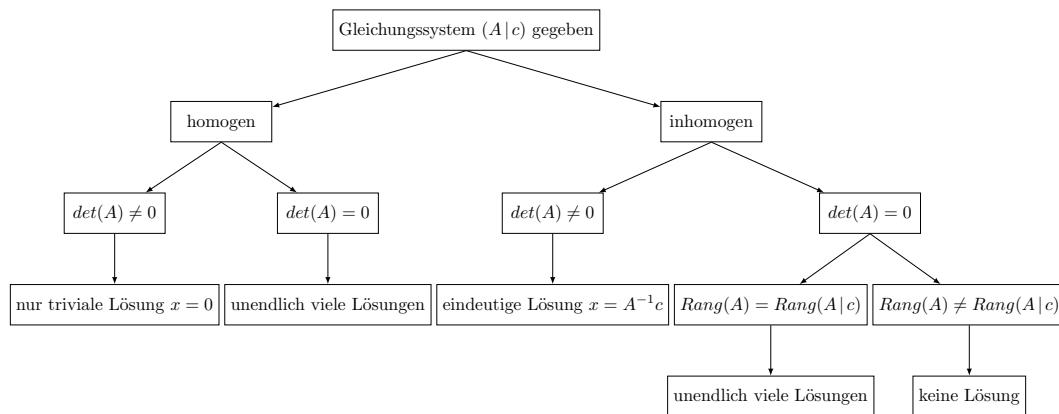
Es gibt zwei Vorteile dieses Verfahrens:

1. Es werden nie Brüche auftauchen, sofern im gegebenen Gleichungssystem keine Brüche vorkommen. Denn Determinanten sind immer ganze Zahlen, wenn die Einträge ganze Zahlen sind.
2. Flüchtigkeitsfehler sind seltener in diesem Verfahren, weil zum einen keine Brüche vorkommen und Vorzeichenfehler vom Addieren eines Vielfaches einer Zeile zu einer anderen nicht mehr vorkommen können.

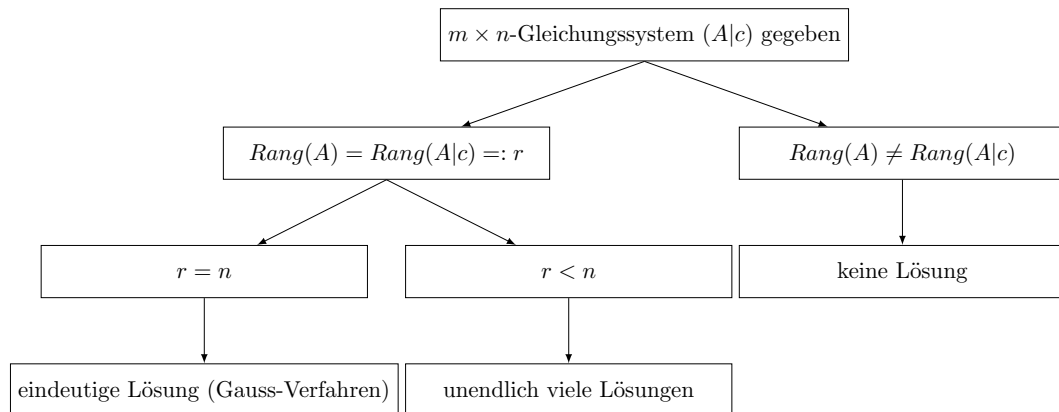
Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems

Das Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems können wir mithilfe der Determinante oder des Rangs (Anzahl nicht-Nullzeilen in Trapezform, also nachdem man das Gauss-Verfahren angewendet hat) untersuchen. Es gilt:

Quadratische Matrix



nicht-quadratische Matrix



Unendlich viele Lösungen

Bei unendlich vielen Lösungen hängt unsere Lösung von mindestens einer Variable (beispielsweise $t \in \mathbb{R}$) ab. Wir gehen dann nach folgendem Rezept vor:

Rezept. (Gauss-Verfahren mit unendlich vielen Lösungen)

1. Führe das Gauss-Verfahren normal durch. Bei unendlich vielen Lösungen, wirst du eine oder mehrere Nullzeilen in der Zeilenstufenform haben.
2. Die Anzahl der freien Variablen ist genau die Anzahl der Nullzeilen. Du setzt also Konstanten s, t, v usw. für jede freie Variable. Dann gilt beispielsweise $x_3 = s$. Die restlichen Nicht-Nullzeilen kannst du dann wie gehabt mit Gleichungen lösen. Diese sind dann abhängig von s, t usw.
3. Schreibe die Lösungen in einen Vektor in Abhängigkeit von $s, t, \dots$

Wir wollen dieses Rezept gleich an einem Beispiel vorzeigen. Sei folgendes System

gegeben:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

Wir führen das Gauss-Verfahren durch und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{L_2+L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{L_3-2L_1 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Wir haben zwei Nullzeilen, also zwei freie Variablen. Wir setzen beispielsweise $x_3 = s$ und $x_2 = t$. Wir erhalten mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 2t + 3s &= 0 \\ x_1 &= 2t - 3s\end{aligned}$$

und somit die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Eigenvektoren sind Vektoren, welche keine Nullvektoren sind und folgende Eigenschaft erfüllen

$$Av = \lambda v$$

Dabei nennen wir λ den Eigenwert.

Eigenwerte

Um Eigenwerte zu berechnen, gehen wir nach folgendem Rezept vor und benützen das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rezept. (Eigenwerte berechnen)

1. Schreibe die Matrix $A - \lambda E_n$ auf. Das heisst: subtrahiere von der Diagonalen der Matrix jeweils λ . Wir erhalten mit unserem Beispiel

$$A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

2. Bestimme nun die Determinante der Matrix $A - \lambda E_n$. Wir nennen $p_A = \det(A - \lambda E_n)$ das charakteristische Polynom. In unserem Beispiel erhalten wir mit Sarrus

$$p_A = \det(A - \lambda E_n) = (3 - \lambda) \cdot \lambda(\lambda - 2)$$

3. Setze das charakteristische Polynom gleich 0 und löse nach λ auf. Für unser Beispiel erhalten wir demnach

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$$

Es gibt viele Eigenschaften von Eigenwerten. Zwei davon möchten wir hier erwähnen, da sie häufig Rechnungen stark vereinfachen.

1. Besteht eine Matrix nur aus reellen Zahlen und ist ein Eigenwert eine komplexe Zahl, so folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, dass auch das komplex konjugierte dieser komplexen Zahl ein Eigenwert ist (charakteristische Polynom hat reelle Koeffizienten und somit ist auch das komplex Konjugierte der Zahl eine Nullstelle).
2. Das Produkt aller Eigenwerte ist genau die Determinante. Es gilt also

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Wenn uns nur ein Eigenwert fehlt und wir die Determinante leicht berechnen können, dann können wir so ziemlich einfach den letzten Eigenwert erhalten.

3. Die sogenannte Spur der Matrix ist die Summe aller Eigenwerte:

$$\text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots$$

Dabei ist $\text{Spur}(A)$ definiert als die Summe aller Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Das bedeutet, wir können folgenden Trick anwenden um Eigenwerte zu finden:

Trick. Sind **bis auf 2** Eigenwerte schon alle gegeben und man soll diese zwei Eigenwerte herausfinden, so kann man zwei Gleichungen aufstellen:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \underbrace{\dots \cdot \lambda_n}_{\text{bekannt}} = \det(A)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \underbrace{\dots + \lambda_n}_{\text{bekannt}} = \text{Spur}(A)$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man die zwei fehlenden Eigenwerte.

Ein Beispiel für diesen Trick wäre folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sei ein Eigenwert schon bekannt: $\lambda_1 = 2$. Die Determinante ist $\det(A) = -20$ und die Spur ist $\text{Spur}(A) = -1$. Wir möchten nun noch λ_2 und λ_3 finden. Wir stellen also folgende Gleichungen auf:

$$\det(A) = -20 = 2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\text{Spur}(A) = -1 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3$$

und somit

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -10$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -3$$

Man kann nun die zweite Gleichung nach λ_2 auflösen und dann in die erste einsetzen und man erhält:

$$\lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -5$$

Eigenvektoren

Wir fassen die Eigenvektoren-Berechnung ebenfalls nochmals in einem Rezept zusammen, indem wir wieder das Beispiel von vorhin benützen.

Rezept. (Eigenvektoren v_i zum Eigenwert λ_i berechnen)

1. Schreibe die Matrix $A - \lambda_i E_n$ auf. Das heisst: subtrahiere von der Diagonalen der Matrix jeweils λ_i . Wir erhalten mit unserem Beispiel und dem Eigenwert $\lambda_1 = 3$:

$$A^* = A - 3E_n = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & -1 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Du erhältst wieder ein Gleichungssystem $A^*v = 0$. Löse nun mit dem Gauss-Verfahren das Gleichungssystem und erhalte die möglichen Eigenvektoren. In unserem Beispiel erhalten wir mit Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wir haben eine freie Variable. Es folgt aus $x_3 = s \implies x_2 = \frac{3s}{2}$ und damit $x_1 = s$. Wir erhalten somit die Eigenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ \frac{3s}{2} \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Es gelten folgende zwei Eigenschaften für Eigenvektoren

Merken. 1. Die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig.

2. Wir können einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von Eigenvektoren v_i schreiben. Es existieren also α_i , sodass

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

5.4 Inverse einer 3×3 Matrix berechnen

Eine schöne Methode zur Berechnung von der Inversen einer 3×3 -Matrix bietet das folgende (etwas längere) Rezept, wobei wir als Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

verwenden:

1. Zuerst berechnen wir die Determinante von A . In unserem Beispiel also (mit Entwick-

eln nach der letzten Zeile)

$$\det(A) = 5 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = -10$$

Dies wird unser Vorfaktor der Inversen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2. Schreibe nun die Matrix wie bei Sarrus mit den zwei ersten Spalten wiederholt hin:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Schreibe anschliessend die ersten zwei Zeilen unten nochmals hin, also

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

3. Streiche nun die erste Zeile und Spalte:

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}$$

4. Wir beginnen oben links: die Determinante der erste 2×2 Matrix bildet den ersten Eintrag unserer Inversen:

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Der nächste Eintrag in der Zeile ist gegeben durch die nächste Determinante der 2×2 -Matrix eine Spalte tiefer:

$$\begin{array}{c|cccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ & \end{pmatrix}$$

Wir bemerken also, dass wir mit den 2×2 -Matrizen die Zeilen nach unten wandern, während wir die Einträge nach rechts einfüllen! Weiter geht es also mit

$$\begin{array}{c|cccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ & & \end{pmatrix}$$

Wir beginnen noch die zweite Zeile:

$$\begin{array}{c|cccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ -5 & & \end{pmatrix}$$

Dies führen wir weiter bis alle Determinanten berechnet worden sind und somit alle Felder ausgefüllt sind. Das Resultat ist dann

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6 Differentialgleichungen

6.1 homogene DGL 1. Ordnung lösen (mit und ohne Anfangsbedingung)

Form

Linear:

$$y'(x) = p(x)y(x)$$

Nicht-linear:

$$y'(x) = p(x)g(y(x)).$$

Rezepte

Linear:

Merken. Die Lösung von $y'(x) = p(x)y(x)$ ist

$$y(x) = Ce^{\int p(x) dx}$$

Nicht-linear:

Rezept. (Lösen von Differentialgleichungen der Form $y' = p(x)g(y)$)

1. Ersetze die Ableitung durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = p(x)g(y)$$

2. Stelle nun die Gleichung so um, dass alle y -Terme auf einer Seite und alle x -Terme (inklusive dx auf der anderen sind.

$$\frac{dy}{g(y)} = p(x)dx$$

3. Integriere beide Seiten (Konstanten nicht vergessen!).
4. Stelle die Gleichung nach y um.

Bemerkung: Es ist häufig einfacher als Notation $y = y(x)$ zu verwenden. Das Resultat lässt sich einfach überprüfen, in dem man die Lösung wieder in die Differentialgleichung einsetzt und schaut, ob beide Seiten übereinstimmen.

Beispiel

Linear: Sei die DGL gegeben durch

$$y' = 3xy$$

dann ist die Lösung dieser Gleichung

$$y = Ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

da

$$\int 3x \, dx = \frac{3}{2}x^2 (+C)$$

wobei das $+C$ schon in die Konstante vorhin einfließt.

Nicht-linear: Man bestimme die Lösung y der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y}$$

(mit der Annahme, dass y stets positiv ist). Wir lösen die Differentialgleichung mit der Trennung der Variablen.

1. Wir ersetzen die Ableitung durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

2. Nun trennen wir die Variablen x und y und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \iff \frac{1}{\sqrt{y}} dy = dx$$

3. Wir integrieren beide Seiten und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int dx \\ 2\sqrt{y} &= x + C \end{aligned}$$

4. Schlussendlich stellen wir die Gleichung nach y um.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{y} &= x + C \\ y &= \left(\frac{x + C}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

6.2 inhomogene DGL 1. Ordnung lösen (Variation der Konstanten, mit und ohne Anfangsbedingung)

Form

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$$

Rezept

Rezept. (Lösen von Differentialgleichungen der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$)

1. Wir denken uns im ersten Schritt das $q(x)$ am Schluss weg und lösen die homogene Gleichung $y'(x) = p(x)y(x)$. Somit erhalten wir $y_h(x) = Ce^{P(x)}$ wobei

$$P(x) = \int p(x) dx$$

2. Wir ersetzen nun das C durch eine Funktion $C(x)$ und erhalten

$$y(x) = C(x)e^{P(x)}.$$

3. Nun setzen wir diese Lösung in unsere Gleichung oben ein und erhalten

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x) \iff C'(x)e^{P(x)} + P'(x)C(x)e^{P(x)} = p(x)C(x)e^{P(x)} + q(x)$$

4. Da aber $P'(x) = p(x)$ gilt, kürzt sich dieser Term auf beiden Seiten weg und wir erhalten

$$C'(x)e^{P(x)} = q(x)$$

5. Wir lösen diese Differentialgleichung nach $C(x)$ und setzen sie in unsere Lösung ein, also

$$C'(x) = e^{-P(x)}q(x) \longrightarrow C(x) = \int e^{-P(x)}q(x)dx$$

wobei wir das $+C$ nicht vergessen dürfen!!

Unsere Lösung ist dann gegeben durch $y(x) = C(x)e^{P(x)}$. Das Resultat lässt sich einfach überprüfen, in dem man die Lösung wieder in die Differentialgleichung einsetzt und schaut, ob beide Seiten übereinstimmen.

Beispiel

Man bestimme alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + 1$. Die Differentialgleichung ist von der Form $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$ mit $p(x) = 1$ und $q(x) = 1$.

1. Wir denken uns $q(x) = 1$ weg und erhalten die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Diese hat die Lösung $y_h(x) = Ce^x$.

2. Wir ersetzen das C durch $C(x)$ und erhalten $y(x) = C(x)e^x$.
3. Im nächsten Schritt setzen wir $y(x)$ wieder in unsere Differentialgleichung ein und erhalten

$$y'(x) = y(x) + 1 \iff C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + 1.$$

4. Wir lösen nun nach $C'(x)$ auf und erhalten

$$C'(x) = e^{-x} \iff C(x) = \int e^{-x} dx.$$

5. Damit ergibt sich

$$C(x) = -e^{-x} + C.$$

6. Wir setzen nun wieder in unsere Lösung ein und erhalten

$$y(x) = (-e^{-x} + C)e^x = Ce^x - 1$$

6.3 homogene DGL 2. Ordnung lösen (char. Gleichung, mit und ohne Anfangsbedingung)

Form

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rezept

Rezept. (Lösen von Differentialgleichungen der Form $ay'' + by' + cy = 0$)

1. Beginne mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ und setze diesen direkt in die Gleichung ein

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

2. Anschliessend müssen wir alles durch $e^{\lambda x}$ teilen und erhalten die charakteristische Gleichung

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

3. Wir können nun λ bestimmen und müssen drei Fälle unterscheiden

- (a) $b^2 - 4ac > 0$: Es gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell und die Lösung ist gegeben durch

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- (b) $b^2 - 4ac = 0$: Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ reell und die Lösung ist gegeben durch

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

wobei das x im zweiten Term hinzugekommen ist.

- (c) $b^2 - 4ac < 0$: Es gilt $\overline{\lambda_1} = \lambda_2 = \alpha + i\beta$ komplex und die Lösung ist gegeben durch

$$e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

Das Resultat lässt sich einfach überprüfen, in dem man die Lösung wieder in die Differentialgleichung einsetzt und schaut, ob beide Seiten übereinstimmen.

Beispiel

Man bestimme die Lösung y der Differentialgleichung $y'' + 3y' - 4y = 0$.

1. Die charakteristische Gleichung ist gegeben durch

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0.$$

2. Die Lösungen dieser Gleichung sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -4$. Damit haben wir den ersten Fall.
3. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

6.4 inhomogene DGL 2. Ordnung lösen (partikuläre Lösung, mit und ohne Anfangsbedingung)

Form

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Rezept

Rezept. (Lösen inhomogener Differentialgleichungen der Form $y'' + ay' + by = g(x)$)

1. Löse zunächst die homogene Differentialgleichung (setze dafür $g(x) = 0$) mit dem Rezept aus dem letzten Abschnitt $\Rightarrow y_h$.
2. Finde eine partikuläre Lösung y_p mithilfe der Lösungsansätze in der Tabelle weiter unten, wobei du die unbekannten Koeffizienten meist mit Koeffizientenvergleich finden kannst $\Rightarrow y_p$.
3. Die Lösung ist

$$y = y_p + y_h$$

Tabelle

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
	DGL: $y'' + ay' + by = g(x)$ char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$
Polynom vom Grad n	• $b \neq 0 : y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Cx + D$ • $a \neq 0, b = 0 : y_p = Ax^{n+1} + Bx^n + \dots + Cx^2 + Dx$ • $a = 0, b = 0 : y_p = Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + \dots + Cx^3 + Dx^2$ Dabei sind a, b von $y'' + ay' + by = g(x)$ zu entnehmen. $A, B, C, \dots$ sind die, durch Koeffizientenvergleich zu bestimmenden, Koeffizienten.
$g(x) = ke^{cx}$	• c ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = A \cdot e^{cx}$ • c ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ • c ist eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ Dabei ist c von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. A ist der zu bestimmende Koeffizient. Tipp: die Nullstellen des charakteristischen Polynoms hast du schon bestimmt λ_1, λ_2. Falls beide gleich sind und c entsprechen, ist es beispielsweise eine doppelte Nullstelle.
$g(x) = \sin(\beta x)$ oder $g(x) = \cos(\beta x)$ oder $g(x) = n \cdot \sin(\beta x) + m \cdot \cos(\beta x)$ wobei $n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$.	• $i\beta$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ • $i\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax \cdot \sin(\beta x) + Bx \cdot \cos(\beta x)$ Dabei ist β von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. A und B sind die zu bestimmende Koeffizienten. Alternativ kann auch $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$ respektive $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \phi)$ als Ansatz gebraucht werden, wobei C und ϕ die zu bestimmenden Koeffizienten sind.
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ Dabei ist P_n ein Polynom n -ten Grades.	• $c + i\beta$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = e^{cx}(Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x))$ • $c + i\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = x \cdot e^{cx}(Q_n \cdot \sin(\beta x) + R_n \cdot \cos(\beta x))$ Dabei sind c und β von der Störfunktion $g(x)$ zu entnehmen. Die Polynome n-ten Grades Q_n und R_n enthalten die zu bestimmende Koeffizienten. Man setze also beispielsweise $Q_n = Ax^n + Bx^{n-1} \dots + Cx + D$ und bestimme die Koeffizienten $A, B, C, \dots$ mit Koeffizientenvergleich.

Beispiel

$$y'' + y' - 2y = e^{2x}$$

Die homogene Lösung ist gegeben durch die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Nach dem Rezept von vorhin finden wir das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

und mit den Nullstellen die Lösung

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Nun widmen wir uns der Störfunktion e^{2x} . Wir sind in der zweiten Zeile der Tabelle und haben $c = 2$. 2 ist aber keine Lösung des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

und somit wählen wir den Ansatz

$$y_p = A e^{2x}$$

Dies setzen wir nun in unsere DGL ein und erhalten:

$$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = e^{2x}$$

Wir erhalten also

$$A = \frac{1}{4}$$

und somit ist unsere gesamte Lösung

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{4} e^{2x}$$

7 Mehrdimensionale Funktionen

7.1 Tangentialebene Aufgaben

Wir haben bei eindimensionalen Funktionen gelernt, dass wir an jeder differenzierbaren Stelle eine Tangente anlegen können. Diese Tangente am Punkt x_0 war dann gegeben durch $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Bei mehrdimensionalen Funktionen sind diese Tangenten Tangentialebenen. Also Ebenen welche den Graphen nur berühren, aber nicht schneiden. Die Tangentialebene am Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$E(x, y) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Für einen kritischen Punkt gilt aus $\partial_x f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = 0$ dann $E(x, y) = f(x_0, y_0)$ (also $E(x, y)$ konstant und somit horizontal). Eine solche Tangentialebene für $f(x, y) = -x^2 - y^2$ im Punkt $(1, 1)$ ist beispielsweise gegeben durch (Übung!)

$$E(x, y) = -2(x + y - 1)$$

7.2 Extremwertaufgabe (ohne Nebenbedingung) lösen

Um kritische Punkte zu bestimmen (also Kandidaten für Extrema und Sattelpunkte) benützen wir folgendes Rezept:

Rezept. (Bestimmen kritischer Punkte)

1. Wir berechnen die partiellen Ableitungen und setzen beide 0. Daraus ergeben sich zwei Gleichungen. Durch diese zwei Gleichungen können wir x_0 und y_0 bestimmen.
2. Bestimme $\partial_{xx}f, \partial_{yy}f$ und $\partial_{xy}f$. Existieren alle und sind stetig können wir fortfahren.
3. Sei $D = \partial_{xx}f \cdot \partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2$. Berechne nun $D(x_0, y_0)$ und unterscheide folgende Fälle
 - (a) $D(x_0, y_0) > 0$: der Punkt ist eine lokales Extremalstelle. Falls $\partial_{xx}f < 0$ gilt, so handelt es sich um ein lokales Maximum und falls $\partial_{xx}f > 0$ gilt, handelt es sich um ein lokales Minimum (man kann dies auch mit $\partial_{yy}f$ überprüfen).
 - (b) $D(x_0, y_0) < 0$: der Punkt ist ein Sattelpunkt und keine Extremalstelle

Wir untersuchen im folgenden kritische Punkte von $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dabei gehen wir wie im Rezept vor:

1. Wir setzen die partiellen Ableitungen gleich 0

$$\partial_x f = 2x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_y f = -2y \stackrel{!}{=} 0$$

Aus $2x = 0$ folgt $x = 0$ und aus $-2y = 0$ folgt auch $y = 0$. Somit ist $(0, 0)$ unser Kandidat.

2. Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$\partial_{xx}f = 2 \quad \partial_{yy}f = -2 \quad \partial_{xy}f = 0$$

Sie sind alle konstant und somit auch stetig.

3. Wir bestimmen nun $D(0, 0)$. Es gilt

$$D(0, 0) = (2) \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0.$$

Somit haben wir einen Sattelpunkt in $(0, 0)$.

7.3 Extremwertaufgabe (mit Nebenbedingung) lösen

Wir können auch Extremalprobleme haben mit einer Nebenbedingung. Diese Nebenbedingung gilt es zuerst in die Form $\phi(x, y) = 0$ zu bringen. Danach kann folgendes Rezept nützlich sein:

Rezept. (Extremwertprobleme mit Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$)

1. Schreibe eine neue Funktion $\Lambda(x, y, \lambda)$ hin (Lagrange-Funktion). Diese ist gegeben durch

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$$

und setze die Nebenbedingung und Funktion ein.

2. Berechne die partiellen Ableitungen $\partial_x \Lambda(x, y, \lambda)$, $\partial_y \Lambda(x, y, \lambda)$, $\partial_\lambda \Lambda(x, y, \lambda)$ und setze sie alle gleich 0. Finde dann alle Lösungen $(x_0, y_0, \lambda_0)^T$ des Gleichungssystems. Dies sind die Kandidaten.
3. Die Hesse-Matrix ist gegeben durch

$$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}\Lambda & \partial_{xy}\Lambda & \partial_{x\lambda}\Lambda \\ \partial_{yx}\Lambda & \partial_{yy}\Lambda & \partial_{y\lambda}\Lambda \\ \partial_{\lambda x}\Lambda & \partial_{\lambda y}\Lambda & \partial_{\lambda\lambda}\Lambda \end{pmatrix}$$

Setze für (x, y, λ) die Kandidaten (x_0, y_0, λ_0) ein. Unterscheide folgende Fälle

- (a) $\det(H(x_0, y_0, \lambda_0)) > 0$: lokales Maximum in (x_0, y_0) .
- (b) $\det(H(x_0, y_0, \lambda_0)) < 0$: lokales Minimum in (x_0, y_0) .
- (c) $\det(H(x_0, y_0, \lambda_0)) = 0$: keine Aussage möglich mit diesem Ansatz (wir werden nicht weiter darauf eingehen).

Ein Beispiel: Man solle die Kandidaten für die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $y = x^2 - 1$ bestimmen. Danach soll man den einfachsten der drei Kandidaten klassifizieren (bestimmen, ob Extrema oder Sattelpunkt).

1. Die Nebenbedingung lautet $\phi(x, y) = y - x^2 + 1 = 0$. Unsere Lagrange-Funktion ist

$$\Lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot (y - x^2 + 1)$$

2. Die partiellen Ableitungen sind

$$\partial_x \Lambda(x, y, \lambda) = 2x - 2\lambda x = 2x(1 - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_y \Lambda(x, y, \lambda) = 4y + \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_\lambda \Lambda(x, y, \lambda) = y - x^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Aus der ersten Gleichung haben wir entweder $\lambda = 1$ oder $x = 0$. Wir unterscheiden also:

- (a) $x = 0$: die dritte Gleichung ergibt $y = -1$ und aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda = 4$. Somit haben wir

$$(0, -1), \quad \lambda = 4$$

als unseren ersten Kandidaten.

- (b) $\lambda = 1$: aus der zweiten Gleichung haben wir $y = -\frac{1}{4}$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

somit sind unsere Kandidaten

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{4}\right), \quad \lambda = 1 \\ &\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{4}\right), \quad \lambda = 1 \end{aligned}$$

- (c) Wir klassifizieren nun $(0, -1)$. Die Hesse-Matrix ist gegeben durch

$$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2(1 - \lambda) & 0 & -2x \\ 0 & 4 & 1 \\ -2x & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $(0, -1)$ (und $\lambda = 4$) eingesetzt also

$$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist $\det(H) = 6 > 0$ und somit ein lokales Maximum in $(0, -1)$.

8 Mehrdimensionale Integrale

8.1 Gebietsintegrale bestimmen

Mit folgendem Rezept bestimmen wir Gebietsintegrale von einem einfachen Gebiet:

Rezept. Bestimmen des Gebietsintegrals $\iint_B f(x, y) dA$ für

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

1. Schreibe das Integral wie folgt auf

$$\iint_B f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

2. Wir können das Integral als ein verschachteltes Integral betrachten.

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

3. Löse das innere Integral

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy =: I(x)$$

Dabei kannst du x als eine Konstante betrachten.

4. Nun löse das äussere Integral

$$\int_a^b I(x) dx$$

Die Lösung ist dann das Volumen unter dem Graphen.

Wie bestimmen wir aber ein Gebiet, wenn dieses nur als Zeichnung gegeben ist:

Merken. Ein einfaches Gebiet ist immer von der Form:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Die Grenzen a und b von x können als das "Minimum" und "Maximum" von x gewählt werden, wo das Gebiet existiert. $g(x)$ und $h(x)$ sind die untere und obere Funktion des Gebiets, wenn man die vertikalen Linien ausser Acht lässt.

Ein wichtiger Satz für Gebietsintegrale ist der folgende:

Satz. Der Flächeninhalt von B ist gegeben durch

$$\iint_B 1 dA$$

Polarkoordinaten

Häufig ist es einfacher ein Gebiet in Polarkoordinaten anzugeben. Ein einfaches Gebiet in Polarkoordinaten ist von der Form

$$B = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

Das Integral kann dann wie folgt gelöst werden

$$\iint_B f(x, y) dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot \textcolor{red}{r} dr d\varphi$$

Wir ersetzen also alle unsere x durch $r \cos(\varphi)$ und alle unsere y durch $r \sin(\varphi)$. Da das r am Schluss bei vielen Studierenden häufig verloren geht, wurde es hier extra rot geschrieben. Haben wir die Transformation in Polarkoordinaten erledigt, können wir wie im Rezept für kartesische Koordinaten fortfahren.

9 Vektoranalysis

9.1 Kurven parametrisieren

Im Folgenden sind wichtige Parametrisierungen aufgeführt:

Geraden parametrisieren

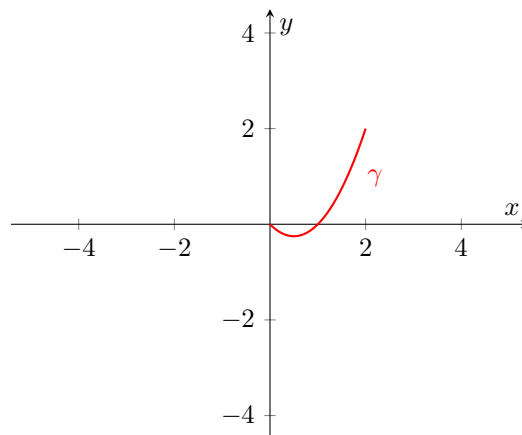
Sei (x_1, y_1) der Anfangspunkt einer Gerade und (x_2, y_2) der Endpunkt. Dann ist die Parametrisierung wie folgt gegeben

Merken.

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

Funktionen parametrisieren

Nun wollen wir folgende Kurve (von links nach rechts) parametrisieren



wobei die Funktion im Intervall $[0, 2]$ genau $f(x) = x^2 - x$ ist. Die Parametrisierung ist allgemein gegeben durch

Merken.

$$\gamma : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Dabei sind x_1 und x_2 jeweils die x Werte von wo bis wo die Funktion geht.

In unserem Beispiel von vorhin, würden wir also

$$\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - t \end{pmatrix}$$

erhalten.

Kreise

Kreise werden immer durch folgende Parametrisierung beschrieben

Merken.

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$$

dabei ist R der Radius des Kreises. Will man nur ein Stück des Kreises, so kann man als Intervall $I = [\alpha, \beta]$ den gewünschten "Winkelsektor" auswählen.

9.2 Kurvenintegrale über Vektorfelder lösen

Kurvenintegrale von Vektorfelder

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

können wir mit dem folgenden Rezept lösen:

Rezept. (Berechnung eines Arbeitsintegrals $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$)

1. Parametrisiere die Kurve γ , das heisst finde

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

2. Berechne $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$ (jede Komponente nach dem Parameter t ableiten).
3. Benutze die Formel

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

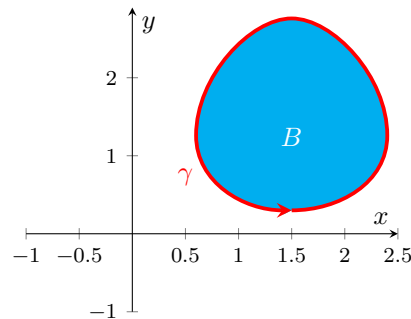
Es gilt ausserdem der folgende Satz:

Satz. Wenn eine Kurve γ zusammengesetzt ist aus mehreren Teilkurven $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, dann gilt

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r} + \dots$$

9.3 Satz von Gauss-Green anwenden

Haben wir eine geschlossene Kurve, so bildet diese ein Gebiet B :



Nun besagt der Satz von Green, dass folgende Gleichung für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ gilt:

Satz.

$$\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_B \partial_x F_2 - \partial_y F_1 dA.$$

Wir können also statt unser Kurvenintegral über das Vektorfeld einfach ein Gebietsintegral berechnen. Dieses ist häufig deutlich einfacher zu berechnen, da das Kurvenintegral meist mehrere Kurven beinhaltet. Ein Beispiel: Man berechne das Arbeitsintegral von

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$$

und γ dem Einheitskreis in positiv mathematischer Richtung einmal als Arbeitsintegral direkt und einmal mit dem Satz von Green.

Arbeitsintegral: Wir nehmen die übliche Parametrisierung des Kreises

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Wir berechnen sodann den Geschwindigkeitsvektor

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Wir benutzen die Formel für Wegintegrale und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) dt = -\pi \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral als Übung überlassen wird.

Satz von Green: Wir berechnen zunächst

$$\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0 - 1 = 0$$

Somit ist auch das Integral

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_B (-1) dA = - \iint_B 1 dA$$

Da B genau die Fläche ist, welche von der Kurve umschlossen wird, und somit die Kreisfläche, erhalten wir mit dem letzten Integral die Fläche der Kreisfläche, also $\pi \cdot r^2$ mit $r = 1$:

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = - \iint_B 1 dA = -\pi$$

References

- [1] H. Krizic, *Mathematik, Farkas Edition*, 2023.