# Tag 1

**Aufgabe 1 :**

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + 2x + 1}{2x^6 + 8x + 9}$$

(b) Bestimme die Nullstellen von $x^3 + 3x^2 - 16x + 12$.

(c) Berechne

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

(d) Berechne die Ableitung von $e^{\sqrt{x^3}}$.

**Solution:**

(a) Der Grad im Zähler ist kleiner als im Nenner, deswegen ist der Grenzwert $= 0$.

(b) Wie man mit kurzem Nachrechnen sehen kann, ist $x = 1$ eine Nullstelle. Somit führen wir eine Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 3x^2 - 16x + 12\big) \div \big(x - 1\big) = x^2 + 4x - 12 \\
\underline{-\,x^3 \quad + x^2} \\
\qquad\quad 4x^2 - 16x \\
\qquad \underline{-\,4x^2 \quad + 4x} \\
\qquad\qquad\quad -\,12x + 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{12x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Die Nullstellen können wir nun mithilfe der Mitternachtsformel ausrechnen und erhalten somit insgesamt $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -6$ als Nullstellen.

(c) Mit l'Hopital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$$

(d) Die Ableitung kann durch Anwenden der Kettenregel und $\sqrt{x} = x^{1/2}$ berechnet werden. Wir erhalten

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x^3}}$$

**Aufgabe 2 :**

Finde **alle** $a \in \mathbb{N}$ sodass die folgende Funktion stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sin(x)} & x < 0 \\ \frac{x^5+x^6+x^7}{x^a+x^3+x^4} & x \geq 0 \end{cases}$$

**Solution:** Die beiden Teilfunktionen sind also

$$f_1(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$$
$$f_2(x) = \frac{x^5+x^6+x^7}{x^a+x^3+x^4}$$

Der Berührungspunkt ist $x = 0$ und somit berechnen wir den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = 0$$

wobei wir l'Hopital benutzt haben. Für die andere Teilfunktion müssen wir mehrmals L'Hôpital anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^5+x^6+x^7}{x^a+x^3+x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{5x^4+6x^5+7x^6}{ax^{a-1}+3x^2+4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{20x^3+30x^4+42x^5}{a(a-1)x^{a-2}+6x+12x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{60x^2+120x^3+210x^4}{a(a-1)(a-2)x^{a-3}+6+24x} = \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

Also ist der Grenzwert immer $= 0$, unabhängig von $a$ und somit $a \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3 :**

Bestimme die Taylorreihe bis zur 2-ten Ordnung der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$.

**Solution:** Wir benötigen für diese Aufgabe folgende Ableitungen von $f$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(2x+2)^{-2/3}$$
$$f''(x) = -\frac{8}{9}(2x+2)^{-5/3}$$

Einsetzen des Entwicklungspunkt ergibt:

$$C_0 = f(3) = \sqrt[3]{8} = 2$$
$$C_1 = \frac{f'(3)}{1!}(x-3)^1 = \frac{1}{6}(x-3)$$
$$C_2 = \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 = -\frac{1}{72}(x-3)^2$$

und somit ist unsere Taylorreihe

$$2 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2$$