

Tag 2

Aufgabe 1 :

Löse folgende Integrale:

(a) $\int (x - 2)^3 dx$

(b) $\int \frac{1}{7x+5} dx$

(c) $\int e^{3x-2} dx$

(d) $\int 2xe^{x^2-5} dx$

(e) $\int x \sin(2x^2) dx$

(f) $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$

(g) $\int 5x \sqrt{1 - x^2} dx$

(h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+16}} dx$

(i) $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$

(j) $\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx$

(k) $\int \frac{\cos(x)}{(25+10 \sin(x)+\sin^2(x))} dx$ (schwer!)

(l) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

Solution:

(a) $\frac{1}{4}(x - 2)^4 + C$

(b) $\frac{1}{7} \ln |7x + 5| + C$

(c) $\frac{1}{3}e^{3x-2} + C$

(d) $e^{x^2-5} + C$

(e) $-\frac{1}{4} \cos(2x^2) + C$

(f) $\frac{1}{6}(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$

(g) $-\frac{5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

(h) $\frac{\sqrt{x^4+16}}{2} + C$

(i) $\ln(\sin(x) + 1) + C$

(j) $e^{\sin(x)} + C$

$$(k) -\frac{1}{\sin(x)+5} + C$$

$$(l) -2 \cos(\sqrt{x}) + C$$

Aufgabe 2 :

Berechne folgendes Integral:

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - x - 2}$$

Solution: Es gilt $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ und somit können wir die Partialbruchzerlegung anwenden und erhalten:

$$\frac{2x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Koeffizientenvergleich liefert uns

$$A = \frac{5}{3} \quad B = \frac{1}{3}$$

Die Lösung ist also

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - x - 2} = \int \frac{\frac{5}{3}}{x - 2} + \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} = \frac{5}{3} \ln(x - 2) + \frac{1}{3} \ln(x + 1) + C$$

Aufgabe 3 :

Skizziere die folgende Menge:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z^2)| < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

Solution: Die erste Bedingung kann umgeschrieben werden zu

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(z^2) < \frac{\pi}{2}$$

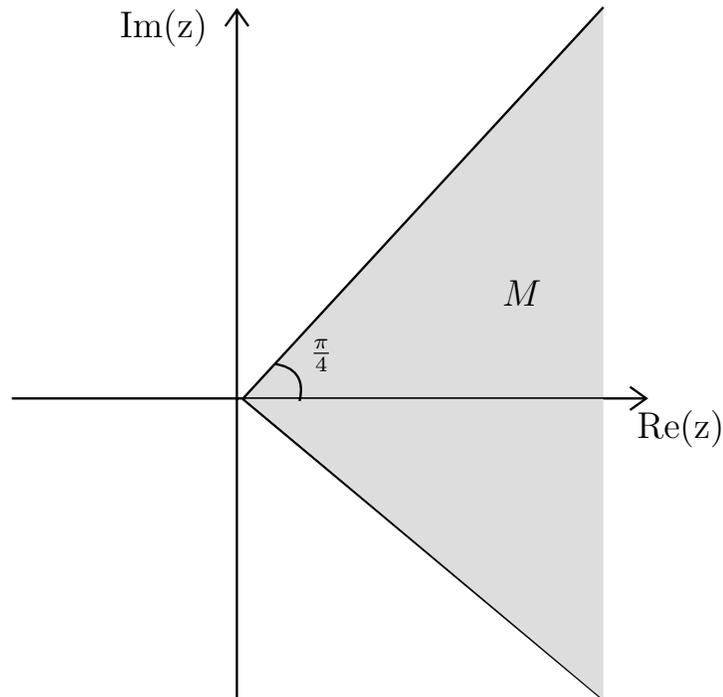
Was ist nun $\arg(z^2)$? Sei $z = re^{i\varphi}$. Dann ist $\arg(z^2)$ der Polarwinkel von $z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$ also genau 2φ . Somit gilt

$$-\frac{\pi}{2} < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$$

und

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

Zusammen mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ (also $x > 0$) erhalten wir die Menge:



Aufgabe 4 :

Berechne alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 16$$

Solution: $w = 16$ in Polarform ist

$$w = 16e^{i \cdot (0+2\pi k)} = 16e^{i \cdot 2\pi k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

und somit

$$z = w^{1/4} = 2e^{i \frac{\pi}{2} k}$$

Einsetzen von $k = 0, 1, 2, 3$ ergibt

$$z_0 = 2$$

$$z_1 = 2i$$

$$z_2 = -2$$

$$z_3 = -2i$$

Diese Aufgabe hätte sich auch grafisch lösen lassen. Denn $z = 2, -2$ sind beide bekannt. Da die Lösungen ein gleichmässiges Quadrat ergeben sollen in der Gaussebene, müssen $2i$ und $-2i$ die beiden anderen Lösungen sein.