Tag 3

Aufgabe 1 :

Untersuche die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$ und gib jeweils alle Lösungen an:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= \mu \end{aligned}$$

Solution: Mit dem Gaussverfahren finden wir die Trapezform

$$(A|c) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

(es kann sehr gut sein, dass man hier was anderes bekommt mit anderen Zeilenumformungen... die Argumente unten sollte man trotzdem haben (also auch die (fast) Nullzeile) Es gilt $\det(A) = 0$. Aber $\text{Rang}(A|c) = 3 \neq 2 = \text{Rang}(A)$ falls $\mu \neq 0$. Somit gibt es keine Lösungen, falls $\mu \neq 0$ ist. Sei nun $\mu = 0$. Dann können wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei wählen und erhalten

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2+2t \\ 3-3t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2 :

Bestimme die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Solution: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5$$

Wir können die Nullstelle $\lambda_1 = 1$ erraten und mit Polynomdivision erhalten wir die restlichen zwei Nullstellen:

$$\lambda_2 = 2 + i$$
$$\lambda_3 = 2 - i$$

Aufgabe 3 :

Löse folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $y(3) = 0$

$$xy' + y = x^2 + 1$$

Solution: Die homogene Gleichung lautet

$$xy_h' + y_h = 0$$

bzw.

$$y_h' = -\frac{1}{x} y_h$$

mit Lösung

$$y_h = Ce^{\int -\frac{1}{x}\, dx} = e^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}.$$

Nun benützen wir Variation der Konstanten, also $C \to C(x)$. Wir setzen $y = \frac{C(x)}{x}$ in unsere DGL ein und erhalten

$$x(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}) + \frac{C(x)}{x} = x^2 + 1$$
$$\implies C'(x) = x^2 + 1$$

Integrieren ergibt

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + K$$

Einsetzen in die homogene Lösung ergibt:

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3 + x + K}{x} = \frac{1}{3}x^2 + 1 + \frac{K}{x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(3) = 3 + 1 + \frac{K}{3} \stackrel{!}{=} 0 \iff K = -12$$

Somit ist die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1 - \frac{12}{x}$$

Aufgabe 4 :

Bestimme die Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung:

$$y'' + 9y = \sin(5x)$$

Solution: Die homogene DGL lautet

$$y'' + 9y = 0$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

und somit $\lambda = \pm 3i$ Wir erhalten also ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) die Lösung

$$y_h = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Nun zur partikulären Lösung. Die Störfunktion ist in der Form $\sin(\beta x)$ mit $\beta = 5$. $5i$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, deswegen müssen wir den Ansatz

$$y_p = A \sin(5x) + B \cos(5x)$$

wählen. Einsetzen in die DGL 2. Ordnung ergibt

$$\begin{aligned} -25A\sin(5x) - 25B\cos(5x) + 9(A\sin(5x) + B\cos(5x)) &= \sin(5x) \\ \implies -16A\sin(5x) - 16B\cos(5x) &= \sin(5x) \end{aligned}$$

und somit $B = 0$ und $A = \frac{-1}{16}$. Wir erhalten also die partikuläre Lösung

$$y_p = -\frac{1}{16}\sin(5x)$$

und somit die Gesamtlösung

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x)$$