Tag 4

Aufgabe 1 :

Bestimme und klassifiziere alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

mit der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 2$$

Hinweis: Du solltest insgesamt vier Lösungen erhalten. Ohne die Hesse-Matrix zu bestimmen: welche zwei Punkte bilden ein globales Maximum und welche zwei Punkte ein globales Maximum (durch einsetzen überprüfen).

Solution: Wir schreiben die Nebenbedingung in die Form $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Also ist die Lagrange Funktion

$$\Lambda = f + \lambda\phi = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

Wir lösen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \partial_x \Lambda &= y + 2\lambda x = 0 \\ \partial_y \Lambda &= x + 2\lambda y = 0 \\ \partial_\lambda \Lambda &= x^2 + y^2 - 2 \end{aligned}$$

Nach λ auflösen ergibt in den ersten beiden Gleichungen:

$$\lambda = -\frac{y}{2x}$$

und

$$\lambda = -\frac{x}{2y}$$

Gleichsetzen ergibt also $y^2 = x^2$ bzw. $x = \pm y$. Zusammen mit der dritten Bedingung finden wir dann die 4 Kandidaten

$$P_1(1, 1) \quad P_2(-1, 1) \quad P_3(1, -1) \quad P_4(-1, -1)$$

Einsetzen der Punkte in die Funktion ergibt $= 1$ für P_1 und P_4 und $= -1$ für P_2 und P_3. Somit bilden P_1 und P_4 ein lokales Maximum und P_2, P_3 ein lokales Minimum.

Aufgabe 2 :

Sei das Gebiet aus Abbildung 1 gegeben. Zeige:

$$\iint_B \frac{y}{1+x^3} dA = \frac{1}{2} \log \frac{9}{8}$$

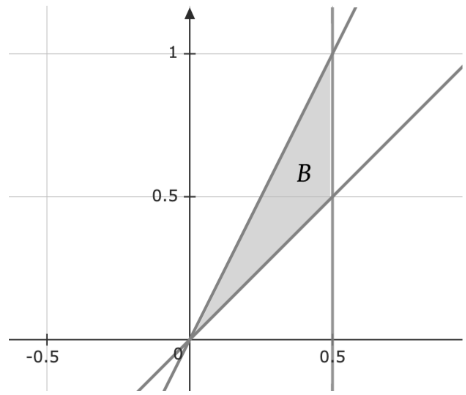

Abbildung 1: Einfaches Gebiet B.

Solution: Das Gebiet ist gegeben durch

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \leq y \leq 2x\}$$

Wir benutzen das Gebietsintegral:

$$\iint_B \frac{y}{1+x^3} dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{2x} \frac{y}{1+x^3} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^3)|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{9}{8}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichung $u = 1 + x^3$ substituiert haben.

Aufgabe 3 :

Berechne

$$\oint_\gamma \vec{F} \, d\vec{r}$$

mit $\vec{F} = (xy^2, yx^2)$ und γ dem Kreis mit Radius $R = 1$ um $(0,0)$

(a) ohne Satz von Gauss-Green.

(b) mit dem Satz von Gauss-Green.

(c) **Freiwillig:** Interpretiere das Resultat physikalisch, wenn $\vec{F}$ ein Kraftfeld beschreibt.

Solution:

(a) Wir parametrisieren die Kurve (Kreis) und erhalten:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Die Ableitung davon ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Wir benutzen die Formel für Kurvenintegrale und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)\sin^2(t) \\ \cos^2(t)\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^3(t)\sin(t) - \cos(t)\sin^3(t) dt \\
&= -\frac{\cos^4(t)}{4}\Big|_0^{2\pi} + -\frac{\sin^4(t)}{4}\Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt im ersten Summanden $\cos(t)$ substituiert und im zweiten Summanden $\sin(t)$.

(b) Wir berechnen das Kurvenintegral mit dem Satz von Green und erhalten:

$$\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \iint_B \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dA = \iint_B 2xy - 2xy \, dA = \iint_B 0 \, dA = 0$$

(c) Man muss also keine Arbeit verrichten, um einen Gegenstand in diesem Kraftfeld einmal im Kreis zu drehen. Falls für jede geschlossene Kurve das Kurvenintegral bei einem Kraftfeld $= 0$ ergibt, so nennt man das Kraftfeld "konservativ". Dies ist eine Eigenschaft, die vor allem in der Physik wichtig ist, da Kraftfelder in der Natur so gut wie immer konservativ sind.