

Probepfprüfung 1

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) [1 Punkt] Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^6 + 2x^3 + 2x + 1}{2x^6 + 8x + 9}$$

(b) [2 Punkte] Bestimme den Definitionsbereich und das Bild der Funktion $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

(c) [3 Punkte] Bestimme die Nullstellen von $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

(d) [2 Punkte] Berechne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$$

(e) [2 Punkte] Berechne die Ableitung von $e^{\sin(x^2)}$.

(f) [3 Punkte] Löse das Integral

$$\int_0^1 3x e^{x^2} dx$$

Aufgabe 2 :

Sei folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \sin(x) + ax & x > 0 \\ 3a + e^x + \cos(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) **[2 Punkte]** Für welches a ist diese Funktion in $x = 0$ stetig?
- (b) **[3 Punkte]** Ist die Funktion differenzierbar in $x = 0$?

Sei nun in den weiteren Teilaufgaben

$$f(x) = \frac{2x^2}{2x - 1}$$

- (c) **[1 Punkte]** Bestimme die Polstelle(n).
- (d) **[3 Punkte]** Wo ist $f(x)$ **streng** monoton fallend? *Hinweis: Beachte, dass wir mindestens eine Polstelle haben aus (c).*

Aufgabe 3 :

- (a) **[1 Punkt]** Zeige, dass $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ gilt.
(b) **[3 Punkte]** Berechne

$$\frac{(1+i)^6}{3+i}$$

- (c) **[2 Punkte]** Zeichne folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3 \text{ und } 0 < \text{Im}(z) < 1\}$$

- (d) **[3 Punkte]** Bestimme alle Nullstellen von $z^3 = -i$ in Polardarstellung.

Aufgabe 4 :

- (a) **[4 Punkte]** Zeige, dass die Taylorreihe von $f(x) = \frac{x}{e^x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gegeben ist durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} x^k$$

gegeben ist. *Hinweis: Die Taylorreihe von e^x ist: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.*

- (b) **[2 Punkte]** Bestimme den Konvergenzbereich.

Aufgabe 5 :

[8 Punkte] Berechne das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$$

Hinweis: Zeige zuerst $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$.

Auswertung

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---------|----|---|---|---|---|-------|
| Punkte | | | | | | |
| Maximal | 13 | 9 | 9 | 6 | 8 | 45 |