Probeprüfung 1

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) **[1 Punkt]** Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{14x^6 + 2x^3 + 2x + 1}{2x^6 + 8x + 9}$$

(b) **[2 Punkte]** Bestimme den Definitionsbereich und das Bild der Funktion $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

(c) **[3 Punkte]** Bestimme die Nullstellen von $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

(d) **[2 Punkte]** Berechne

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$$

(e) **[2 Punkte]** Berechne die Ableitung von $e^{\sin(x^2)}$.

(f) **[3 Punkte]** Löse das Integral

$$\int_0^1 3xe^{x^2}\,dx$$

Solution:

(a) Wir haben denselben Grad oben wie unten und somit ist die Lösung $\frac{14}{2} = 7$.

(b) Der Definitionsbereich ist $D = [0, \infty)$ und das Bild $[2, \infty)$.

(c) Wie man mit kurzem Nachrechnen sehen kann, ist $x = 1$ eine Nullstelle. Somit führen wir eine Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^3 + 2x^2 - x - 2\big) \div \big(x - 1\big) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-\,x^3 + x^2} \\
\qquad 3x^2 - x \\
\qquad \underline{-\,3x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die Nullstellen können wir nun mithilfe der Mitternachtsformel ausrechnen und erhalten somit insgesamt $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$ als Nullstellen.

(d) Wir bemerken, dass dies genau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

entspricht. Mit l'Hopital erhalten wir somit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(e) Die Ableitung kann durch mehrfaches Anwenden der Kettenregel berechnet werden. Wir erhalten

$$f'(x) = e^{\sin(x^2)} \cos(x^2) \cdot 2x$$

(f) Wir substituieren $u = x^2$ und erhalten mit $u' = 2x$ somit

$$\int_0^1 3xe^{x^2}\, dx = \frac{3}{2}(e-1)$$

Aufgabe 2 :

Sei folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}\sin(x) + ax & x > 0 \\ 3a + e^x + \cos(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) **[2 Punkte]** Für welches a ist diese Funktion in $x = 0$ stetig?

(b) **[3 Punkte]** Ist die Funktion differenzierbar in $x = 0$?

Sei nun in den weiteren Teilaufgaben

$$f(x) = \frac{2x^2}{2x-1}$$

(c) **[1 Punkte]** Bestimme die Polstelle(n).

(d) **[3 Punkte]** Wo ist $f(x)$ **streng** monoton fallend? *Hinweis: Beachte, dass wir mindestens eine Polstelle haben aus (c).*

Solution:

(a) Wir bestimmen jeweils den Grenzwert bei $x = 0$ für beide Funktionen:

$$\lim_{x\to 0} x^{-1}\sin(x) + ax = \lim_{x\to 0} x^{-1}\sin(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0} 3a + e^x + \cos(x) = 3a + 1 + 1 = 3a + 2$$

Da beide gleich sein müssen, haben wir $a = -\frac{1}{3}$.

(b) Wir berechnen die Ableitung der ersten Funktion:

$$(x^{-1}\sin(x) + ax)' = a + \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

wobei wir die Quotientenregel verwendet haben. Nun möchten wir die Ableitung am Punkt $x = 0$ bestimmen. Dazu bilden wir den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} a + \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = a + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2} = a$$

wobei wir l'Hopital benutzt haben. Auf der anderen Seite haben wir

$$\lim_{x\to 0} e^x - \sin(x) = 1$$

und somit müsste $a = 1$ gelten, damit die Funktion differenzierbar ist. Dies ist aber nicht möglich, da nur mit $a = -\frac{1}{3}$ die Funktion stetig ist. Somit ist die Funktion nicht differenzierbar.

(c) Die Polstelle ist $x = \frac{1}{2}$, da an diesem Punkt der Nenner verschwindet.

(d) Die Ableitung der Funktion ist

$$f'(x) = \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

Die Extremalstellen sind $x = 0$ und $x = 1$. Ohne die zweite Ableitung zu berechnen, können wir einen beliebigen Wert für x einsetzen um zu schauen, wo die Funktion fallend, bzw. steigend ist. Der Nenner der ersten Ableitung ist immer positiv, aufgrund des Quadrats. Der Zähler ist positiv für alle negativen x. Für x zwischen 0 und 1 ist der Zähler negativ und dann für $x > 1$ wieder positiv. Somit, könnte man meinen, ist die Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ monoton fallend. Man bemerke aber, dass sich in $x = \frac{1}{2}$ eine Polstelle befindet. Wir können also $[0, 1]$ nicht als ein monoton fallendes Intervall betrachten. Richtig ist also, dass die Funktion $f(x)$ auf $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1)$ streng monoton fallend ist.

Aufgabe 3 :

(a) **[1 Punkt]** Zeige, dass $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ gilt.

(b) **[3 Punkte]** Berechne

$$\frac{(1+i)^6}{3+i}$$

(c) **[2 Punkte]** Zeichne folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 3 \text{ und } 0 < \text{Im}(z) < 1\}$$

(d) **[3 Punkte]** Bestimme alle Nullstellen von $z^3 = -i$ in Polardarstellung.

Solution:

(a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

(b) Wir können $(1+i)^6$ mithilfe von Polarkoordinaten berechnen. Wir können aber auch feststellen, dass $(1+i)^2 = 2i$ ist und somit $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$. Wir erhalten dann

$$\frac{-8i}{3+i} = \frac{-8i(3-i)}{10} = -\frac{8+24i}{10} = -\frac{4}{5}(1+3i)$$

(c) Die y-Achse (imaginäre Achse) ist abgegrenzt durch 0 und 1 und wir nehmen ein Kreissegment, welches entsteht, wenn wir einen Kreis mit Radius $r = 1$ und $r = 3$ zeichnen.

(d) Wir schreiben

$$-i = e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)}$$

Dann sind unsere drei Nullstellen

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$
$$z_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

Dies ergibt auch Sinn, da $z_1 = i$ ist und i offensichtlich eine Nullstelle von $z^3 = -i$ ist.

Aufgabe 4 :

(a) **[4 Punkte]** Zeige, dass die Taylorreihe von $f(x) = \frac{x}{e^x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gegeben ist durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} x^k$$

gegeben ist. *Hinweis: Die Taylorreihe von* e^x *ist:* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

(b) **[2 Punkte]** Bestimme den Konvergenzbereich.

Solution:

(a) Es gilt $\frac{x}{e^x} = xe^{-x}$. Aus dem Hinweis, können wir x ersetzen: $x \to -x$ und erhalten die Taylorreihe von e^{-x}:

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

Multiplikation mit x ergibt

$$xe^{-x} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+1}$$

Wir können nun den Indexwechsel $k \to k-1$ durchführen, und die Summe von 1 bis ∞ gehen lassen. Wir erhalten dann das gewünschte Resultat

$$xe^{-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} x^k$$

(b) Wir berechnen den Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}}{\frac{(-1)^k}{k!}} \right| = \lim_{k \to \infty} k \to \infty$$

Somit ist der Konvergenzbereich ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5 :

[8 Punkte] Berechne das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \, dx$$

Hinweis: Zeige zuerst $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$.

Solution: Der Hinweis kann mit Polynomdivision gezeigt werden:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 - 2x^2 \ \ - x + 2\big) \div \big(x - 1\big) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-x^3 \ + x^2} \\
\qquad \ -x^2 \ - x \\
\qquad \ \underline{\ \ x^2 \ - x} \\
\qquad\qquad -2x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{\ \ 2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Wir können dann die restlichen zwei Nullstellen berechnen (oder erraten) und erhalten insgesamt

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$$

Wir stellen nun die Partialbrüche auf und erhalten

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Nun können alle Brüche auf einen Nenner geführt werden und wir erhalten

$$\frac{(A+B+C)x^2 + (-A-3B)x + (-2A+2B-C)}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 6 \\
-A - 3B &= -5 \\
-2A + 2B - C &= -5
\end{aligned}$$

Addition von der ersten Zeile zur letzten ergibt dann

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 6 \\
-A - 3B &= -5 \\
-A + 3B &= 1
\end{aligned}$$

und nun Addition der zweiten mit der dritten ergibt $A = 2$. Einsetzen in die anderen Gleichungen ergibt $B = 1$ und $C = 3$. Insgesamt haben wir also

$$\frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

und integrieren ergibt

$$\int \frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\, dx = 2\ln(x-1) + \ln(x+1) + 3\ln(x-2) + C$$

Auswertung

	1	2	3	4	5	Total
Punkte						
Maximal	13	9	9	6	8	45