Partialbruchzerlegung

1. Fall: Nenner lässt sich in verschiedene Linearfaktoren zerlegen

Wenn sich der Nenner in **verschiedene** Linearfaktoren $(x - x_1) \cdot (x - x_2)...$ zerlegen lässt (bzw. wenn der Nenner ein Polynom zweiten Grades ist, gilt $b^2 - 4ac > 0$), dann teilen wir den Bruch wie folgt auf:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + ...$$

Um A, B, C etc. zu bestimmen, bringen wir die gesamte rechte Seite auf einen Nenner und vergleichen den Zähler auf beiden Seiten. Am einfachsten lässt sich das mit einem Beispiel erklären. Sei also

$$\int \frac{t^2 - 2}{t^3 - t}\, dt = \int \frac{t^2 - 2}{(t+1)t(t-1)}\, dt = \int \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t-1}\, dt$$

Wir bringen die rechte Seite auf einen Nenner:

$$\int \frac{t^2 - 2}{(t+1)t(t-1)}\, dt = \int \frac{At(t-1) + B(t-1)(t+1) + Ct(t+1)}{(t+1)t(t-1)}\, dt$$

Vergleichen des Zählers ergibt nun

$$t^2 - 2 = At(t-1) + B(t-1)(t+1) + Ct(t+1)$$

Jetzt können wir die Nullstellen auf beiden Seiten einsetzen, um die Koeffizienten zu finden:

$$\begin{aligned} t = -1 &\implies -1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2} \\ t = 0 &\implies -2 = -B \implies B = 2 \\ t = 1 &\implies -1 = 2C \implies C = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int \frac{t^2 - 2}{(t+1)t(t-1)}\, dt = \int -\frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{2}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\, dt = -\frac{1}{2}\ln|t+1| + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C.$$

© Hrvoje Krizic

2. Fall: Nenner lässt sich in Linearfaktoren zerlegen, mit mehrfachen Nullstellen.

Wenn sich der Nenner in Linearfaktoren mit doppelten (oder mehrfachen) Nullstellen $(x-x_1)^2 \cdot (x-x_2) \cdot ...$ zerlegen lässt (bzw. wenn der Nenner ein Polynom zweiten Grades ist, gilt $b^2 - 4ac = 0$), dann teilen wir den Bruch wie folgt auf:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2} + ...$$

Wir verwenden also als Nenner unserer Partialbrüche jede Potenz bis wir bei der Potenz angekommen sind, die wir in $Q(x)$ haben. Nun gehen wir gleich vor, wie im ersten Fall. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx &= \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}\,dx \\ \frac{x}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} \\ x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2\end{aligned}$$

Jetzt können wir die Nullstellen wieder einsetzen:

$$\begin{aligned}x = 1 &\implies 1 = 2B \implies B = \frac{1}{2} \\ x = -1 &\implies -1 = 4C \implies C = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Jetzt fehlt aber noch ein Koeffizient und wir haben nur zwei Nullstellen! Wir können aber einfach statt $x =$Nullstelle, irgendeinen x-Wert wählen, und diesen in die Gleichung einsetzen. Wählen wir $x = 0$ erhalten wir:

$$x = 0 \implies 0 = -A + B + C \implies A = B + C = \frac{1}{4}$$

Es gilt also

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

Beachte hierbei, dass das zweite Integral **NICHT** $\frac{1}{2}\ln|(x-1)^2|$ ergibt! Wir dürfen die Formel $\int \frac{a}{x+b}\,dx = a\ln|x+b| + C$ nur verwenden, da wir $x+b$ substituieren und sich die Ableitung aufhebt. Substituieren wir aber $u = (x-1)^2$ so hebt sich die Ableitung nicht auf, und wir müssen bei der Substitution noch durch $u' = 2x-2$ teilen! Substituieren wir aber einfach $u = x-1$, erhalten wir $\int u^{-2}\,du$ und wir erhalten die Lösung von weiter oben.

© Hrvoje Krizic

3. Fall: Nenner lässt sich nicht in Linearfaktoren zerlegen

Bevor wir starten, möchten wir kurz eine Formel anschauen, die wir brauchen dürfen:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{2}{L}\arctan\left(\frac{2x+p}{L}\right) + C \qquad \text{mit } L = \sqrt{4q-p^2}$$

Jetzt können wir starten: Sei als Beispiel

$$\int \frac{4x+7}{x^2+4x+5}\,dx$$

gegeben. Wie wir sehen, können wir den Nenner nicht einfach in Linearfaktoren $(x-x_1)\cdot ...$ zerlegen, da die Nullstellen alle nicht reell sind. Ein Trick ist es nun, das Integral umzuschreiben zu

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \to \int \frac{A\cdot Q'(x)+B}{Q(x)}\,dx$$

Wieso wir das machen, sehen wir gleich. Sei also in unserem Beispiel $Q(x) = x^2+4x+5$. Die Ableitung davon ist $Q'(x) = 2x+4$. Wie können wir nun den Zähler in die Form $A\cdot Q'(x)+B$ bringen. Da wir $4x$ im Nenner stehen haben, können wir versuchen, die Ableitung mal 2 zu rechnen. Das ergibt $4x+8$. Um den gewünschten Zähler aber zu erhalten, müssen wir noch -1 rechnen, da wir im Zähler $4x+7$ statt $4x+8$ stehen haben. Es gilt also

$$\int \frac{4x+7}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{2(2x+2)-1}{x^2+4x+5}\,dx$$

Das ist genau die gewünschte Form, mit $A = 2$ und $B = -1$. Jetzt werden wir sehen, wieso das alles überhaupt Sinn ergibt. Es gilt:

$$\int \frac{2(2x+2)-1}{x^2+4x+5}\,dx = 2\int \frac{2x+2}{x^2+4x+5}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

Das erste Integral ist nun immer von der Form

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx = \ln|Q(x)| + C.$$

Das zweite Integral ist von der Form aus der Formel weiter oben, mit $p = 4, q = 5$ und somit $L = \sqrt{4} = 2$. Es gilt also

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{2}{2}\arctan\left(\frac{2x+4}{2}\right) + C = \arctan(x+2) + C$$

und somit

$$\int \frac{4x+7}{x^2+4x+5}\,dx = 2\int \frac{2x+2}{x^2+4x+5}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = 2\ln|x^2+4x+5| - \arctan(x+2) + C$$

© Hrvoje Krizic