Tipps Serie 4

Hrvoje Krizic

hkrizic@ethz.ch

Aufgabe 1 ♡

Typische Prüfungsaufgabe. Gehe vor, wie in der Übungsstunde. Errate zuerst eine Nullstelle (versuche $x = 1, -1, ...$). Du kannst nun mit der Polynomdivision oder dem Horner-Schema die restlichen zwei Nullstellen finden.

Aufgabe 2 ♡

Dies ist zwar keine typische Prüfungsaufgabe, aber wir werden häufig Nullstellen dieser Art berechnen müssen und deswegen ist dies eine sehr gute Übung und verdient ein ♡. Die Nullstellen von $\sin$ und $\cos$ lassen sich zwar aus dem Einheitskreis schnell herleiten, jedoch liste ich sie hier nochmals auf:

$$\sin(x) = 0 \implies x = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos(x) = 0 \implies x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

(a) $f(x)$ besteht aus zwei Faktoren. Damit $f(x) = 0$ gilt, muss also **entweder** $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ **oder** $\cos(2x) = 0$ gelten. Finde zuerst die Nullstellen der ersten Funktion, dann die Nullstellen der zweiten Funktion.

(b) Die Gleichung $e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)} = 0$ kann umgeschrieben werden zu $e^{\sin(x)} = e^{-\sin(x)}$ und deswegen $\sin(x) = -\sin(x)$. Erkläre in deinem Lösungsweg den letzten Schritt. Du kannst diese letzte Gleichung nochmals umstellen und die Nullstellen lassen sich dann leicht daraus herleiten.

(c) Wir können $f(x)$ faktorisieren: $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)(3\cos(x) - \sin(x))$. Jetzt haben wir insgesamt drei Faktoren: $\sin(x)$, $\cos^2(x)$ und $(3\cos(x) - \sin(x))$. Finde also die Nullstellen aller dieser Faktoren. Beachte: $\arctan(3)$ ist irrational und nicht einfach mathematisch darstellbar. Benutze einfach den Ausdruck $\arctan(3)$ in deinen Berechnungen und beachte, dass $\tan(x)$ π-periodisch ist (wenn x_0 eine Nullstelle ist, muss also auch $x_0 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle sein).

Aufgabe 3

Für welche Werte von t ist die Funktion $f(t)$ definiert (Nenner darf nicht $= 0$ sein)? Das ergibt dir den maximalen Definitionsbereich. Wir haben ausserdem in der Übungsstunde die Definition von gerade/ungerade gesehen. Du kannst also einfach $(-t)$ in die Funktion einsetzen und schauen, ob die Funktion $f(t)$ oder $-f(t)$ ergibt. Zeige für das Monotonieverhalten nun, dass für alle $t \geq 0$ und $t_1 < t_2$ entweder

$$\frac{1}{1+t_1^2} < \frac{1}{1+t_2^2} \quad \text{monoton wachsend}$$

oder

$$\frac{1}{1+t_1^2} > \frac{1}{1+t_2^2} \quad \text{monoton fallend}$$

gilt. Wiederhole die Rechnung für den Fall, dass alle $t \leq 0$.

Aufgabe 4

Verwende die Formel, die wir in der Übungsstunde hergeleitet haben. Siehe hierzu auch Unterkapitel 1.2.7. in meinem Skript. Ein wichtiger Ausschnitt dieses Unterkapitels: Wir kennen die Perioden der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sin(x) &\implies T = 2\pi \\ \cos(x) &\implies T = 2\pi \\ \tan(x) &\implies T = \pi \end{aligned}$$

Sei die Periode T einer Funktion $f(x)$ gegeben (meist wie oben, trigonometrisch). Dann ist die Periode der Funktion $a \cdot f(bx + c)$ genau $\frac{T}{b}$. Auch wenn dies für die Periode nicht relevant ist: in den Aufgaben gilt immer $a = 1$ und $c = 0$.