Tipps Serie 6

Hrvoje Krizic

hkrizic@ethz.ch

Die Aufgabenserie ist diesmal etwas umfangreicher, jedoch eignen sich insbesondere die Aufgaben 3 und 4 wirklich gut, um das Ableiten zu trainieren. Es ist wichtig, dass ihr gut ableiten könnt, da wir in Zukunft noch viel ableiten werden. Ihr müsst allerdings nicht jede Ableitung vollständig ausrechnen - sucht euch einfach bei beiden Aufgaben jeweils 3-4 Ableitungen aus und konzentriert euch darauf.

Aufgabe 1

(a) Bestimme die Ableitung der Funktion mithilfe der Quotientenregel. Bestimme dann die rechte Seite der Gleichung, indem du einfach die Funktion quadrierst, mit $\frac{K}{Bx^2}$ multiplizierst und anschliessend kürzt. Zeige, dass beide Seiten genau dasselbe ergeben.

(b) Polynom über Polynom. Was ist der Grad des Polynoms im Zähler, was ist der Grad des Polynoms im Nenner?

(c) Beachte $B, x > 0$. Ist $\frac{Bx}{x+K_1}$ oder $\frac{Bx}{x+K_2}$ grösser, wenn $K_1 > K_2$? Da beide gegen den Grenzwert aus b) konvergieren und $f_{B,K}(x) < B$ gilt (erkläre, wieso), muss die grössere Funktion schneller gegen diesen Wert konvergieren.

Auf der nächsten Seite geht's weiter!

Aufgabe 2 (♡)

(a) Ist die Funktion überhaupt stetig? Erinnerung: differenzierbare Funktionen sind automatisch stetig, also können unstetige Funktionen nicht differenzierbar sein.

(b) Bestimme die Ableitung und zeige, dass sie auf dem Intervall existiert.

(c) Es gilt

$$e^{-\frac{1}{|x|}} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

Bestimme die Ableitung für positive Werte von x und zeige, dass der Grenzwert der Ableitung gegen 0 auch gleich 0 sein muss. Du darfst hierfür folgenden Satz verwenden:

Die Funktion e^{-y} für $y \to \infty$ fällt schneller ab als jedes Polynom.

Zeige nun das Gleiche für negative x-Werte.

Aufgabe 3 ♡

(a) Bruch als Potenz schreiben und Standardableitungen verwenden.

(b) Wurzel in Potenz umwandeln und Kettenregel anwenden.

(c) Wurzel in Potenz umwandeln und Kettenregel anwenden.

(d) Kettenregel oder $\log$-Gesetze anwenden.

(e) Wurzel in Potenz umwandeln und Kettenregel anwenden.

(f) Kettenregel und Produktregel anwenden.

(g) $\tan(x)$ durch $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ersetzen und Quotientenregel anwenden.

(h) Kettenregel mehrfach anwenden (oder Additionstheoreme verwenden).

(i) Kettenregel mehrfach anwenden.

Auf der nächsten Seite geht's weiter!

Aufgabe 4 $\heartsuit$

(a) $a^x = e^{x\ln(a)}$ und Kettenregel anwenden.

(b) $x^x = e^{x\ln(x)}$ und Kettenregel anwenden.

(c) Kettenregel anwenden.

(d) Kettenregel anwenden.

(e) $e^x e^{x^3} e^{x^5} e^{x^7} = e^{x+x^3+x^5+x^7}$ verwenden und Kettenregel anwenden.

(f) $\ln(x^x) = x\ln(x)$ und Kettenregel mit Produktregel anwenden.

(g) Wurzeln in Potenzen umschreiben und Kettenregel anwenden.

(h) Kettenregel anwenden.

(i) Verwende die Produktregel für $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \cdot \sin(x)$ und verwende für die Ableitung von $\frac{e^x}{\sqrt{x}}$ die Produktregel.