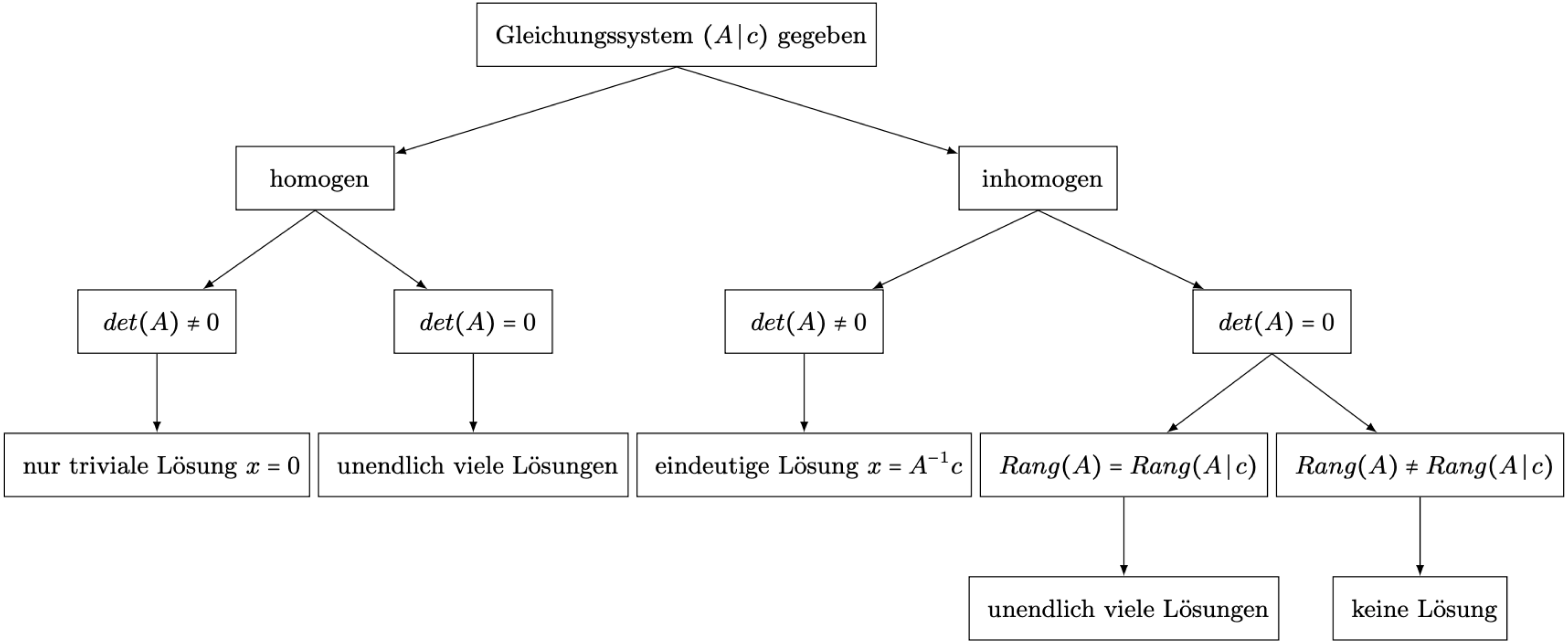
Harry's

Mathematik I/II PVK

Tag 3

19. Juni 2024


Gleichungssystem $(A|c)$ gegeben
homogen
inhomogen
$det(A) \neq 0$
$det(A) = 0$
$det(A) \neq 0$
$det(A) = 0$
nur triviale Lösung $x = 0$
unendlich viele Lösungen
eindeutige Lösung $x = A^{-1}c$
$Rang(A) = Rang(A|c)$
$Rang(A) \neq Rang(A|c)$
unendlich viele Lösungen
keine Lösung

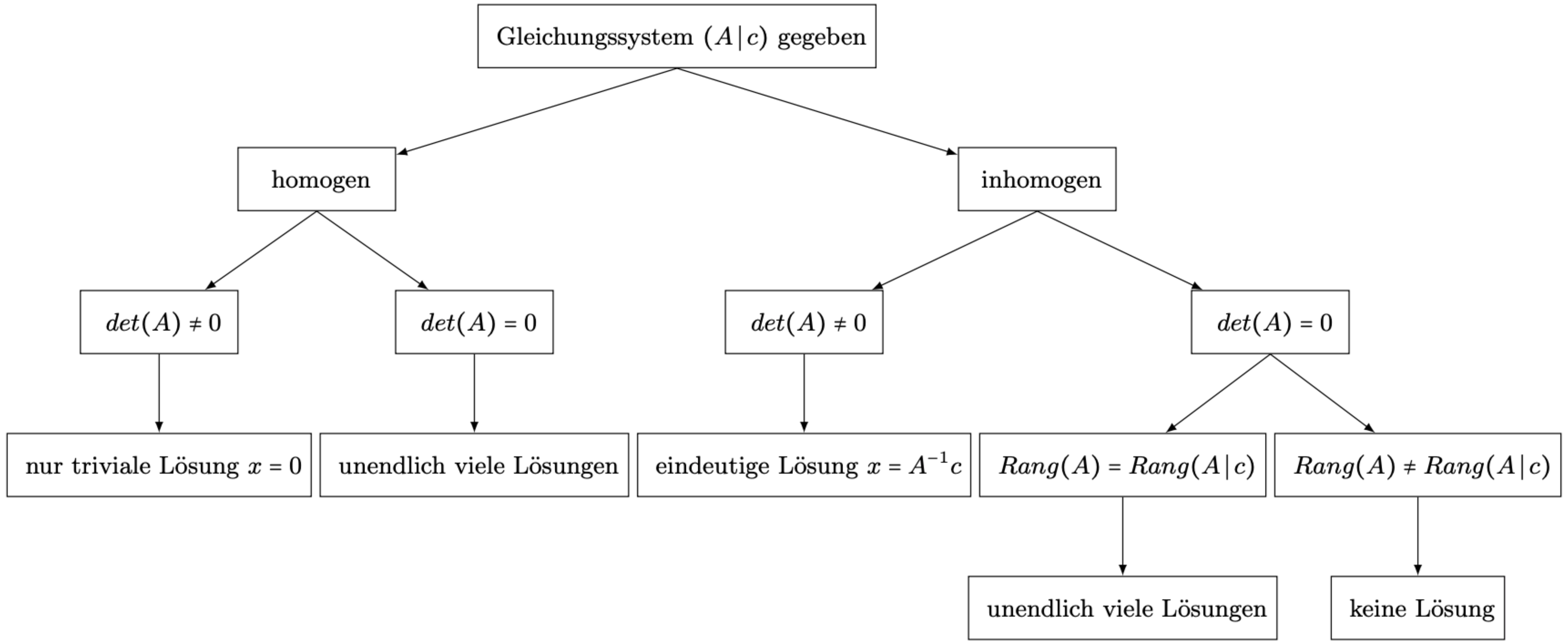
Sommer 2022, Aufgabe 2

2.A1 **[4 Punkte]** Gegeben sei die Matrix $D_b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Determinante von D_b in Abhängigkeit von b.

(ii) Bestimmen Sie alle b, sodass D_b invertierbar ist.

(iii) Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des Linearen Gleichungssystems $D_b \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von b: Für welche b gibt es Lösungen? Für welche b sind diese eindeutig?



Winter 2023, Aufgabe 2

2.MC7 Sei $C_b = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ b^3 & -3 & -4 \\ b^4 & b^2 & 2 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert von $b \in \mathbb{R}$ hat C_b nur reelle Eigenwerte?

(A) $b = -2$

(B) $b = -\dfrac{1}{16}$

(C) $b = 2$

(D) $b = \dfrac{21}{16}$

Winter 2021, Aufgabe 2

(d) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i.) Ein Eigenwert von A ist die komplexe Zahl $\lambda_1 = i$. Berechnen Sie die beiden weiteren Eigenwerte.

Antwort:

$\lambda_2 =$ ____________ $\lambda_3 =$ ____________

Sommer 2022, Aufgabe 2

2.MC8 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Diese definiert eine Entwicklung $v_{n+1} = A \cdot v_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 192 \end{pmatrix}$ ein Startvektor. Welcher Vektor ist dann v_6?

(A) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(B) $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 192 \end{pmatrix}$

(D) $v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sommer 2022, Aufgabe 3

3.A1 **[6 Punkte]** Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = 2xy^2(x)$.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

Winter 2023, Aufgabe 3

3.A1 [6 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = -3y(x) - (2x-3)e^{-x^2}$.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

Hinweis: Es gilt $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$.

(ii) Sei $y(0) = 3$. Bestimmen Sie die Lösung das Anfangwertproblems und $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Differentialgleichung 1. Ordnung

linear:

$y' = p(x)y + q(x)$

nicht-linear:

$y' = p(x)g(y)$

konst. Koeffizienten

$y' = ay + b$

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$$

homogen

$q(x) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(x) = \int p(x)\ \mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow y(x) = Ce^{P(x)} \end{aligned}}$$

inhomogen

$q(x) \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(x) = \int p(x)\ \mathrm{d}x \\ &C(x) = \int e^{-P(x)} q(x)\ \mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow y(x) = C(x)e^{P(x)} \end{aligned}}$$

Trennung der Variablen

$$y' \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \dots\ \mathrm{d}y \ = \ \int \dots\ \mathrm{d}x$$

Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC8 Für $a \in \mathbb{R}$ sei $y''(x) + a \cdot y'(x) + 9y(x) = 0$.

Für welches a definiert $y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-3x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(A) $a = 3$

(B) $a = -3$

(C) $a = 6$

(D) $a = -6$

Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC2 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = (2 - y(x)) \cdot (6 - y(x))$ und $y(0) = y_0$.
Für welchen Wert y_0 ist die Lösungskurve streng monoton fallend?

(A) $y_0 = 8$

(B) $y_0 = 5$

(C) $y_0 = 2$

(D) $y_0 = 0$

Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC3 Sei $y'(x) = (y(x)+7)(y(x)-4)(y(x)+5)$. Für die Lösung y mit $y(0) = 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ldots$

(A) -7.

(B) -5.

(C) 0.

(D) 4.

Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC4 Gegeben sei das Anfangswertproblem mit $y'(x) = -(y(x)+3)(y(x)-1)$ und $y(0) = y_0$.

Für welches y_0 hat der Graph der Lösung für $x \geq 0$ **genau einen** Wendepunkt?

(A) $y_0 = 0$

(B) $y_0 = -2$

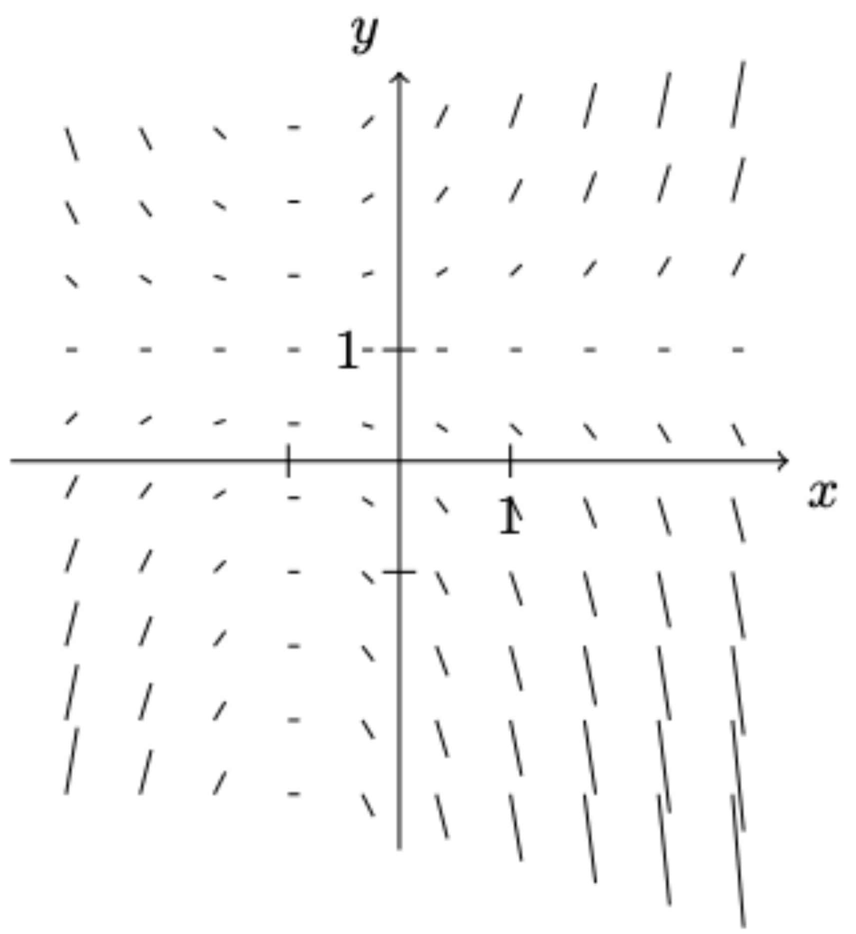
(C) $y_0 = 2$

(D) $y_0 = -4$

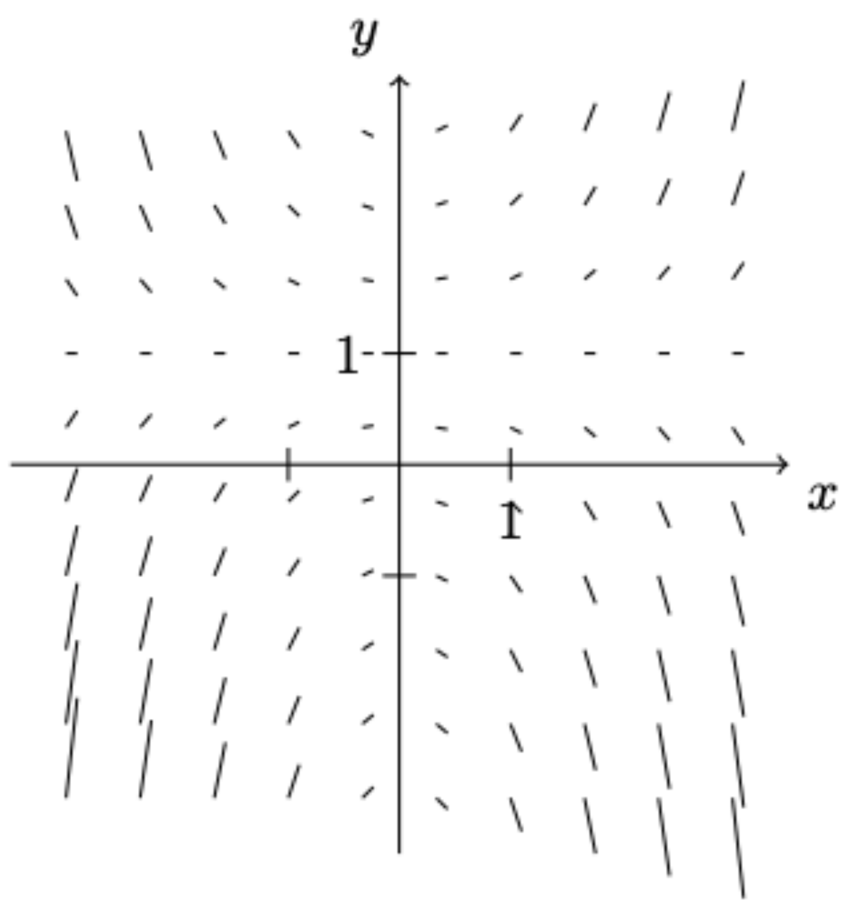
Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC5 Welches Richtungsfeld passt zu $y'(x) = \frac{3}{4}(x+1)(y(x)-1)$?

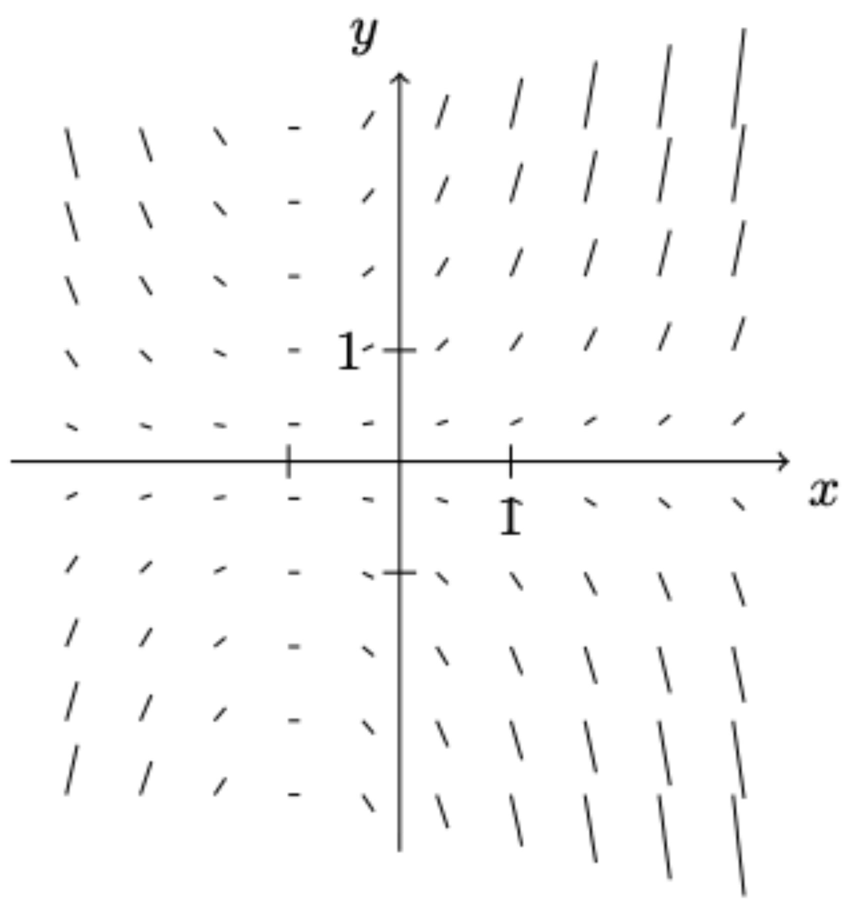
(A)



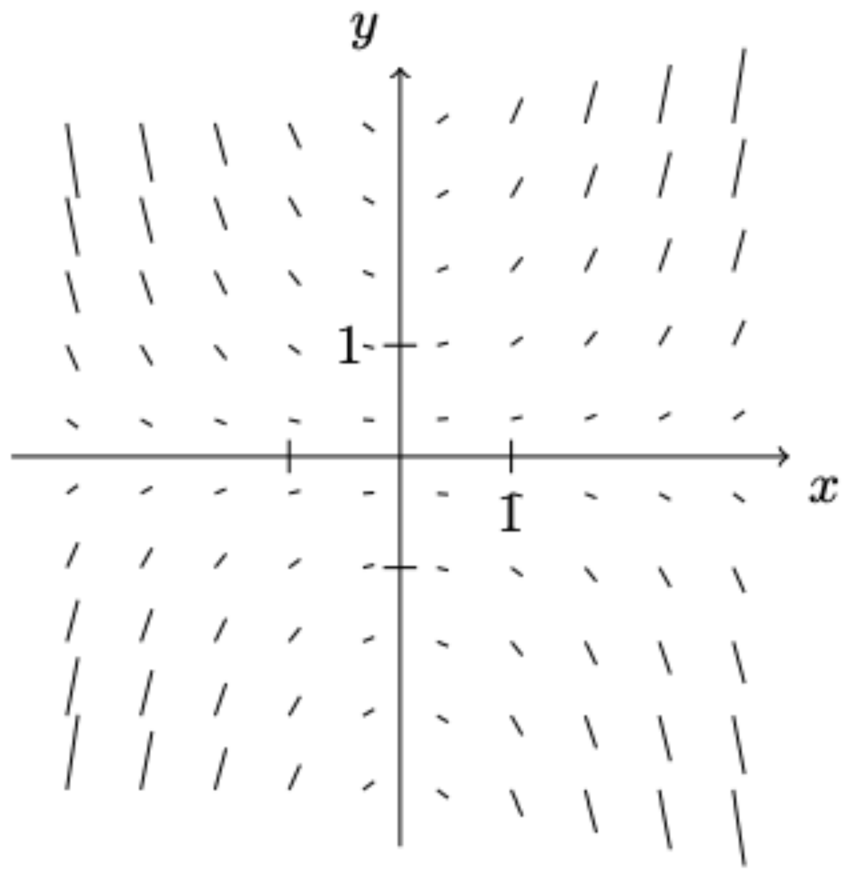
(B)



(C)



(D)



Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC7 Sei $y' = Ay$ das DGL-System mit $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}$.

Für welchen Wert von α hat das System sicher eine stationäre Lösung $y_\infty \neq 0$?

(A) $\alpha = -4$

(B) $\alpha = 2$

(C) $\alpha = 4$

(D) $\alpha = -2$

Rezept. (2×2 DGL-Systeme lösen mit Zurückführen auf DGL 2. Ordnung)

1. Ist $b \neq 0$ und $c = 0$, dann löse die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

   $$y_1''(x) - (a+d)y_1'(x) + \det(A) \cdot y_1(x) = 0$$

   Setze nun die Lösung in die erste Gleichung des Systems

   $$y_1'(x) = ay_1(x) + by_2(x) \implies y_2(x) = \frac{1}{b}(y_1'(x) - ay_1(x))$$

   ein und bestimme $y_2(x)$.

2. Ist $c \neq 0$ und $b = 0$, dann löse die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

   $$y_2''(x) - (a+d)y_2'(x) + \det(A) \cdot y_2(x) = 0$$

   Setze nun die Lösung in die zweite Gleichung des Systems

   $$y_2'(x) = cy_1(x) + dy_2(x) \implies y_1(x) = \frac{1}{c}(y_2'(x) - dy_2(x))$$

   ein und bestimme $y_1(x)$.

3. Ist $b \neq 0$ und $c \neq 0$, dann kannst du entweder nach dem ersten oder zweiten Schema vorgehen. Wichtig ist, nicht beide Funktionen mit der DGL zweiter Ordnung zu lösen, da ansonsten die Konstanten in keinem Zusammenhang stehen.

Winter 2021, Aufgabe 3

(d) Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

(i.) Geben Sie die allgemeine Lösung $x \mapsto y(x)$ an.

Antwort:

$$y(x) = \underline{\qquad C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \qquad}$$

(ii.) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ definiere das System $y'(x) = A \cdot y(x)$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (i.) die Lösung des Systems, die in $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ startet.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.

Sommer 2022, Aufgabe 3

3.MC6 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ definiert das DGL-System $y' = Ay$. Für welches X ist

$$\left\{ t \to y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} X \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

eine Lösung dieses Systems?

(A) $X = -3$

(B) $X = 1$

(C) $X = 2$

(D) $X = 0$

Sommer 2022, Aufgabe 4

$$g_a(x,y) = 28 - x(ax+3) - (y-a)^2$$

4.MC3 Für die Funktion g_a aus Aufgabenteil **4.MC2** sei nun $a = 6$: Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x,y) = 23 + bx + 2y$$

die Tangentialebene von g_6 an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,5)$?

(A) $b = 12$

(B) $b = 2$

(C) $b = -15$

(D) $b = -5$

Sommer 2022, Aufgabe 4

4.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_a(x, y) = 28 - x(ax+3) - (y-a)^2$.
Für welches a ist $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{8}, 12\right)$ ein kritischer Punkt von g_a?

(A) $a = \frac{1}{8}$

(B) $a = 12$

(C) $a = 3$

(D) $a = 8$