Harry’s

Mathematik I/II PVK

Tag 4

20. Juni 2024

Sommer 2022, Aufgabe 4

$$g_a(x,y) = 28 - x(ax+3) - (y-a)^2$$

4.MC3 Für die Funktion g_a aus Aufgabenteil **4.MC2** sei nun $a = 6$: Für welchen Wert von b beschreibt der Graph der Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x,y) = 23 + bx + 2y$$

die Tangentialebene von g_6 an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 5)$?

(A) $b = 12$

(B) $b = 2$

(C) $b = -15$

(D) $b = -5$

Sommer 2022, Aufgabe 4

4.MC2 Seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_a(x, y) = 28 - x(ax + 3) - (y - a)^2$.
Für welches a ist $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{8}, 12\right)$ ein kritischer Punkt von g_a?

(A) $a = \frac{1}{8}$

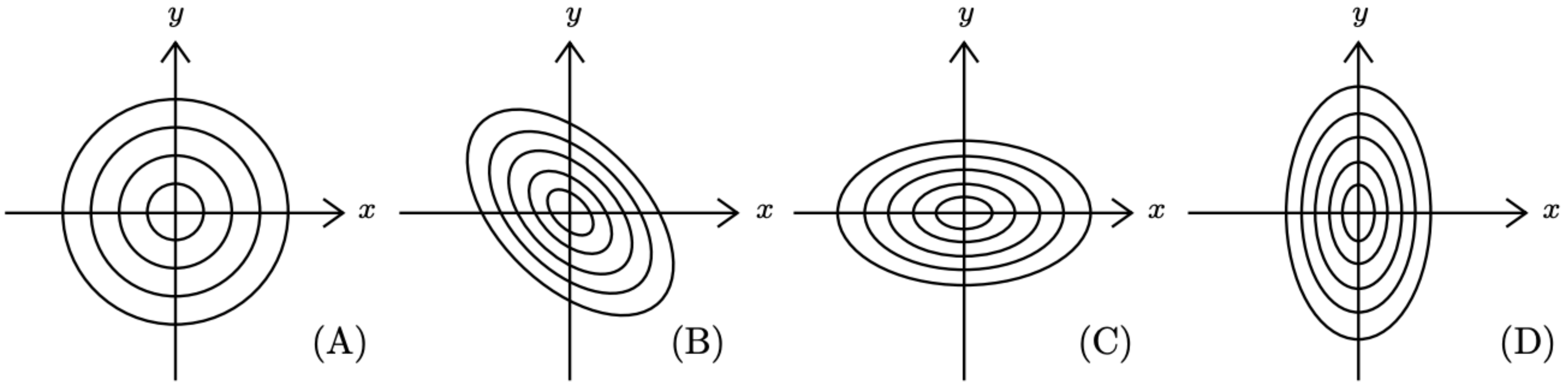
(B) $a = 12$

(C) $a = 3$

(D) $a = 8$

Winter 2023, Aufgabe 4

4.MC1 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Welches der folgenden Bilder zeigt Niveaulinien (oder Höhenlinien) der Funktion f?



Winter 2023, Aufgabe 4

$$h(x, y) = x^2 - 3xy + y^3.$$

4.MC6 Sei h die Funktion aus Aufgabenteil **4.MC5**. Sei γ die Niveaukurve von h in der (x, y)-Ebene, auf der $P = (1, 0)$ liegt. Welche Steigung hat die Tangente an γ in P?

(A) $-\frac{2}{3}$

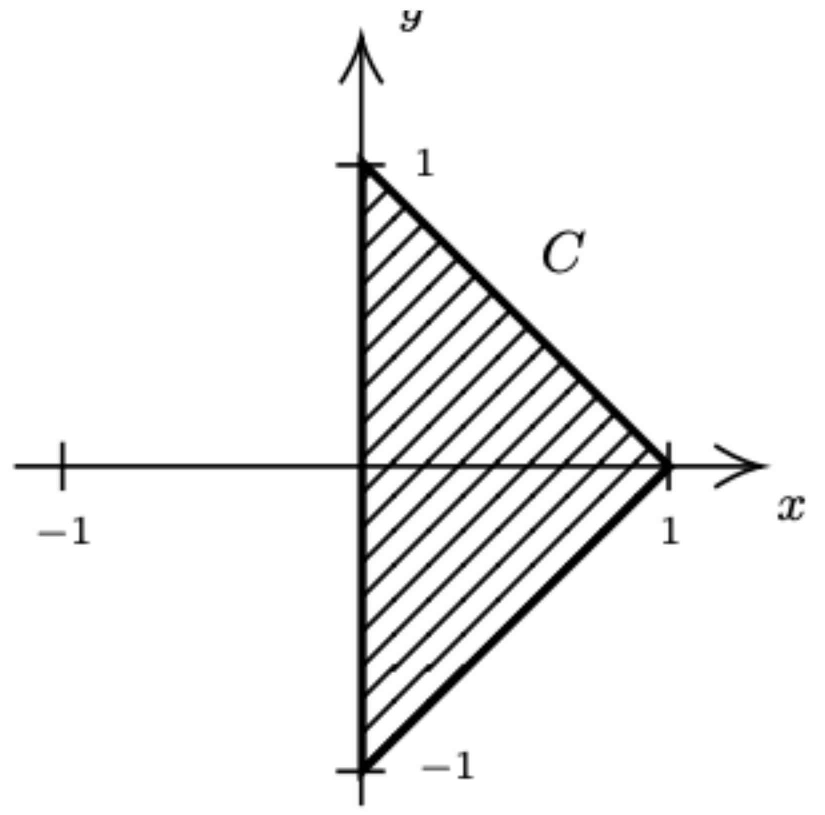
(B) $-\frac{3}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

Winter 2023, Aufgabe 4

4.MC7 Gegeben sei das Gebiet C:



Welcher Integralausdruck berechnet den Flächeninhalt von C?

(A) $\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} dy\, dx$

(B) $\int_0^1 \int_0^{1-y} dx\, dy$

(C) $\int_{-1}^1 \int_0^1 dy\, dx$

(D) $\int_{-1}^1 \int_{y-1}^{1-y} dx\, dy$

Winter 2023, Aufgabe 4

4.A1 [4 Punkte]

(i) Sei die Menge

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)), r \in \left[\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(10)}\right], \varphi \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right] \right\},$$

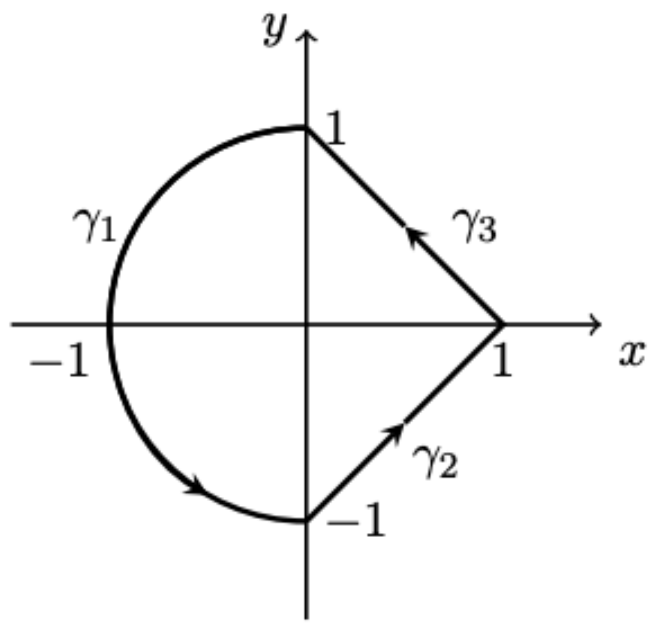
gegeben. Skizzieren Sie die Menge P in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1**.

Hinweis: In Ihrer Skizze können Sie $\sqrt{\ln(2)} \approx 0.8$ und $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$ verwenden.

(ii) Berechnen Sie $I = \iint_P e^{x^2+y^2}\, dA$. **Hinweis:** Rechnen Sie hier mit exakten Werten und nicht mit $\sqrt{\ln(2)} \approx 0.8$ und $\sqrt{\ln(10)} \approx 1.5$!

Sommer 2018, Aufgabe 5

c) Betrachten Sie die folgende Abbildung.



(i) Welche der folgenden Parametrisierungen passt zur Kurve $\gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$?

○ **(A)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $t \in [1,2]$

○ **(B)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

○ **(C)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [-1,0]$

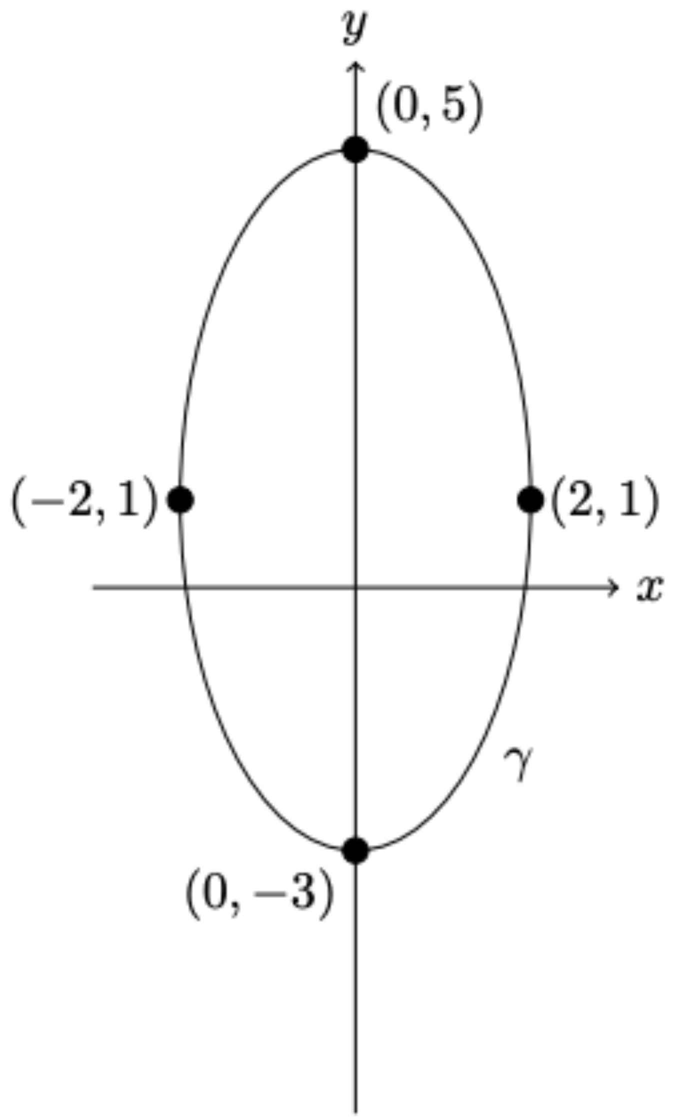
○ **(D)** $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}$, $t \in [0,2]$

(ii) Geben Sie eine Parametrisierung für die Kurve an, welche entsteht, wenn wir γ_1 in **umgekehrter Richtung** durchlaufen.

Antwort: ____

Sommer 2022, Aufgabe 5

5.MC2 Welche der folgenden Parametrisierungen $\gamma(t)$ von γ passt zu diesem Bild?



(A) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{4} + \cos(t) \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$

(B) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 1 + 4\cos(t) \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$

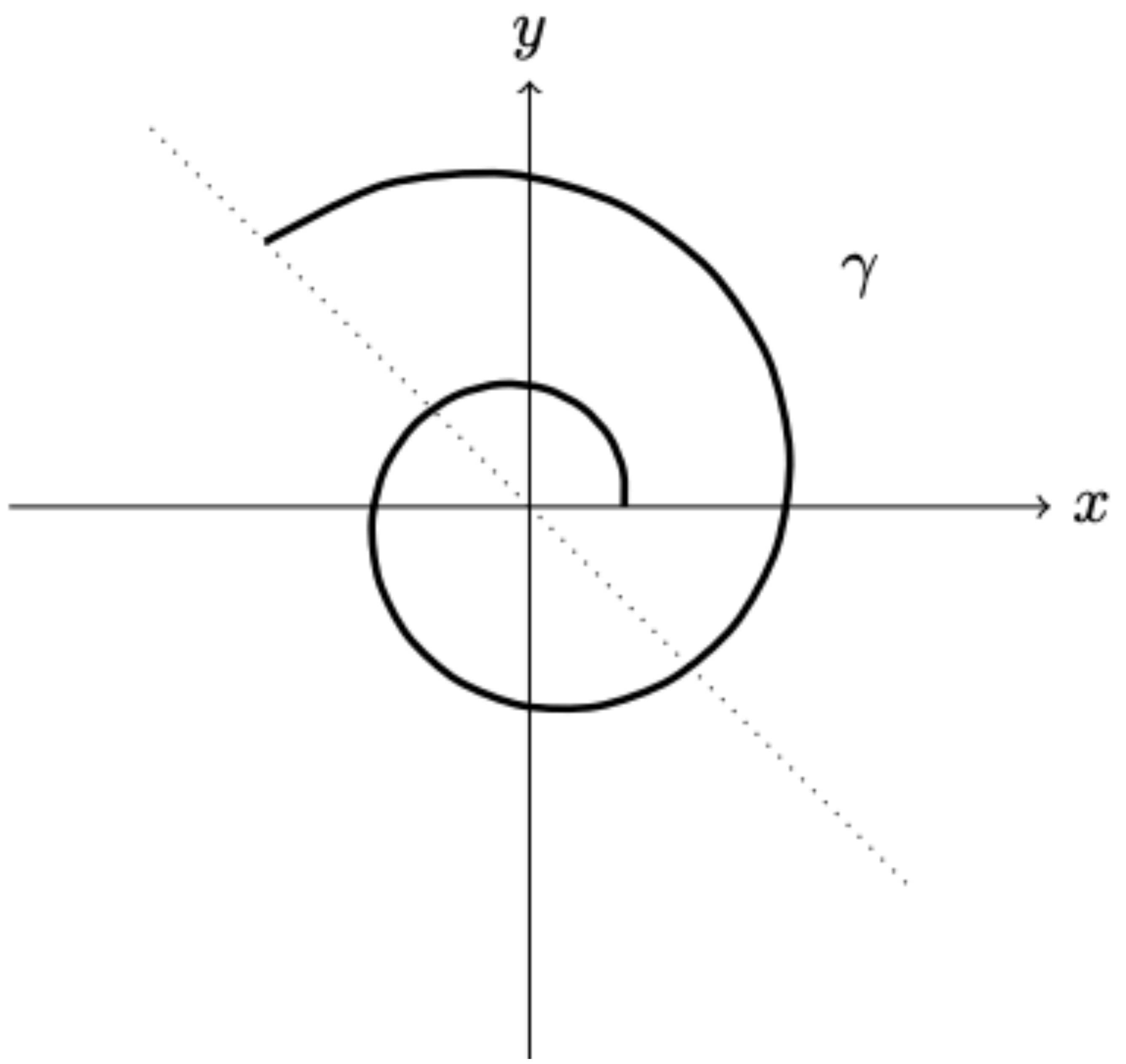
(C) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$

(D) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(t)}{2} \\ \frac{\cos(t)-1}{4} \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi]$

Winter 2023, Aufgabe 5

5.MC2 Sei $\gamma(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Für welches Intervall I liefert $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t)$ die unten abgebildete Kurve? **Hinweis:** Bei der gepunkteten Linie handelt es sich um die Gerade $y = -x$.



(A) $I = \left[0, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

(B) $I = \left[0, \dfrac{9\pi}{4}\right]$

(C) $I = \left[0, \dfrac{11\pi}{4}\right]$

(D) $I = \left[0, \dfrac{13\pi}{4}\right]$

Sommer 2022, Aufgabe 5

5.MC1 Für $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ sei K das Vektorfeld mit $K(x,y) = \begin{pmatrix} cx + y \\ dx + 3y \end{pmatrix}$.

Das Vektorfeld K soll konservativ sein **und** die Divergenz $\operatorname{div}(K) = 2$ haben. Für welches Paar c und d ist das der Fall?

(A) $c = 3$ und $d = 1$

(B) $c = 5$ und $d = 2$

(C) $c = -1$ und $d = 1$

(D) $c = 0$ und $d = 0$

Winter 2023, Aufgabe 5

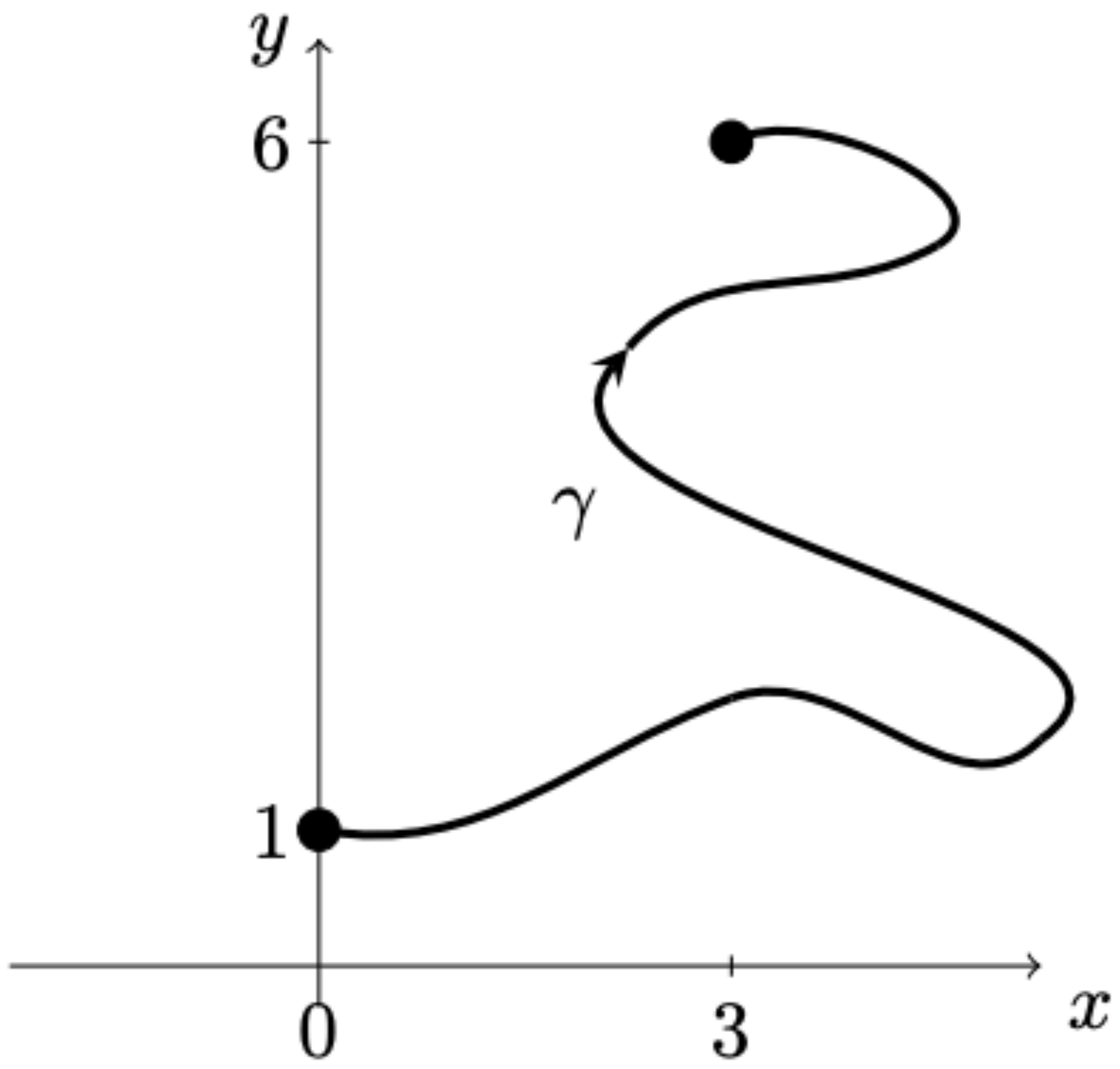
5.A1 [3 Punkte] Sei $\gamma(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)$ für $t \in [0, \ln(2)]$ (vergleiche auch **5.MC2**) oben und das Vektorfeld K mit $K(x, y) = (-y, x)$ gegeben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A1**.

Sommer 2018, Aufgabe 5

e) Sei K das Vektorfeld mit $K(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.

Sei γ eine Kurve in der (x, y)-Ebene von $(0, 1)$ bis $(3, 6)$:



Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma K \cdot d\gamma$.

Sommer 2022, Aufgabe 5

5.MC8 Das Vektorfeld $\widetilde{K}_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{K}_b(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + by + 4xy^2 \\ -2(y^3 + 3y) \end{pmatrix}$ hängt von $b \in \mathbb{R}$ ab.

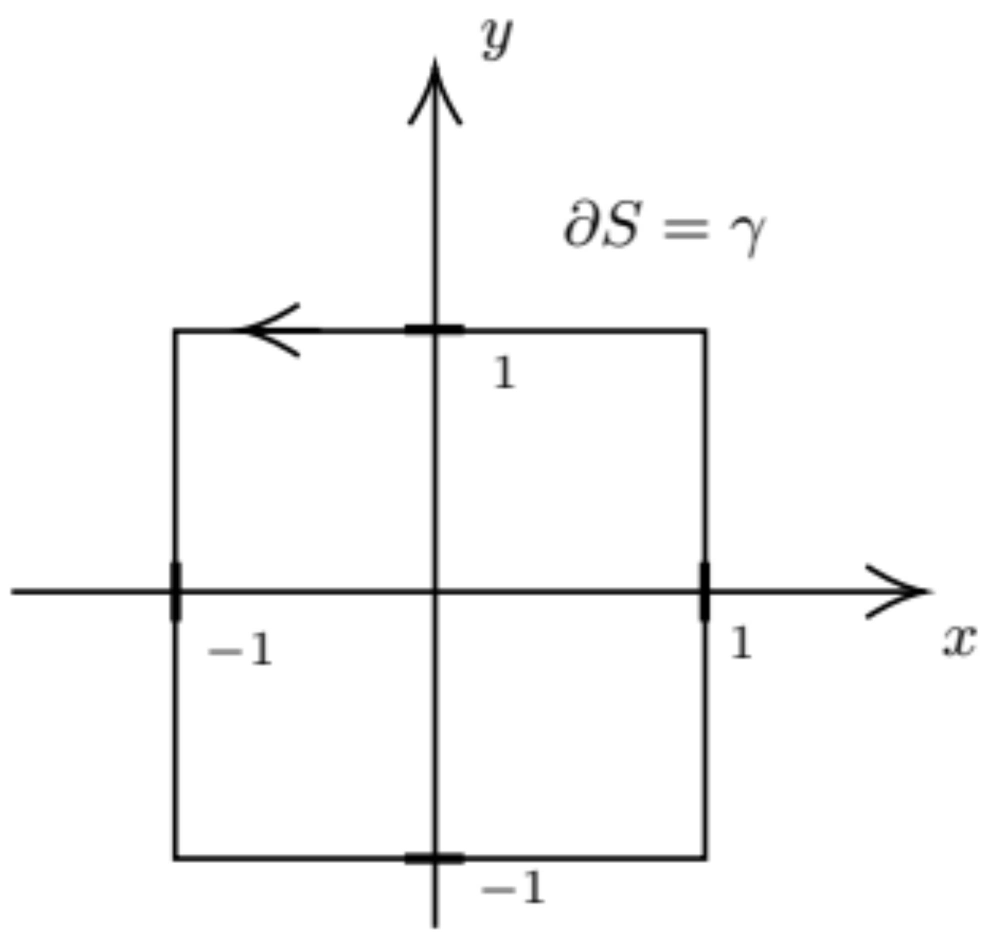
Wir nehmen an, dass die Kurve γ aus **5.MC7** den Punkt $(1,0)$ als Anfangs- und als Endpunkt hat. Für welches b ist dann das Arbeitsintegral $\oint_\gamma \widetilde{K}_b \cdot d\gamma = 8$?

(A) $b = 4$

(B) $b = 8$

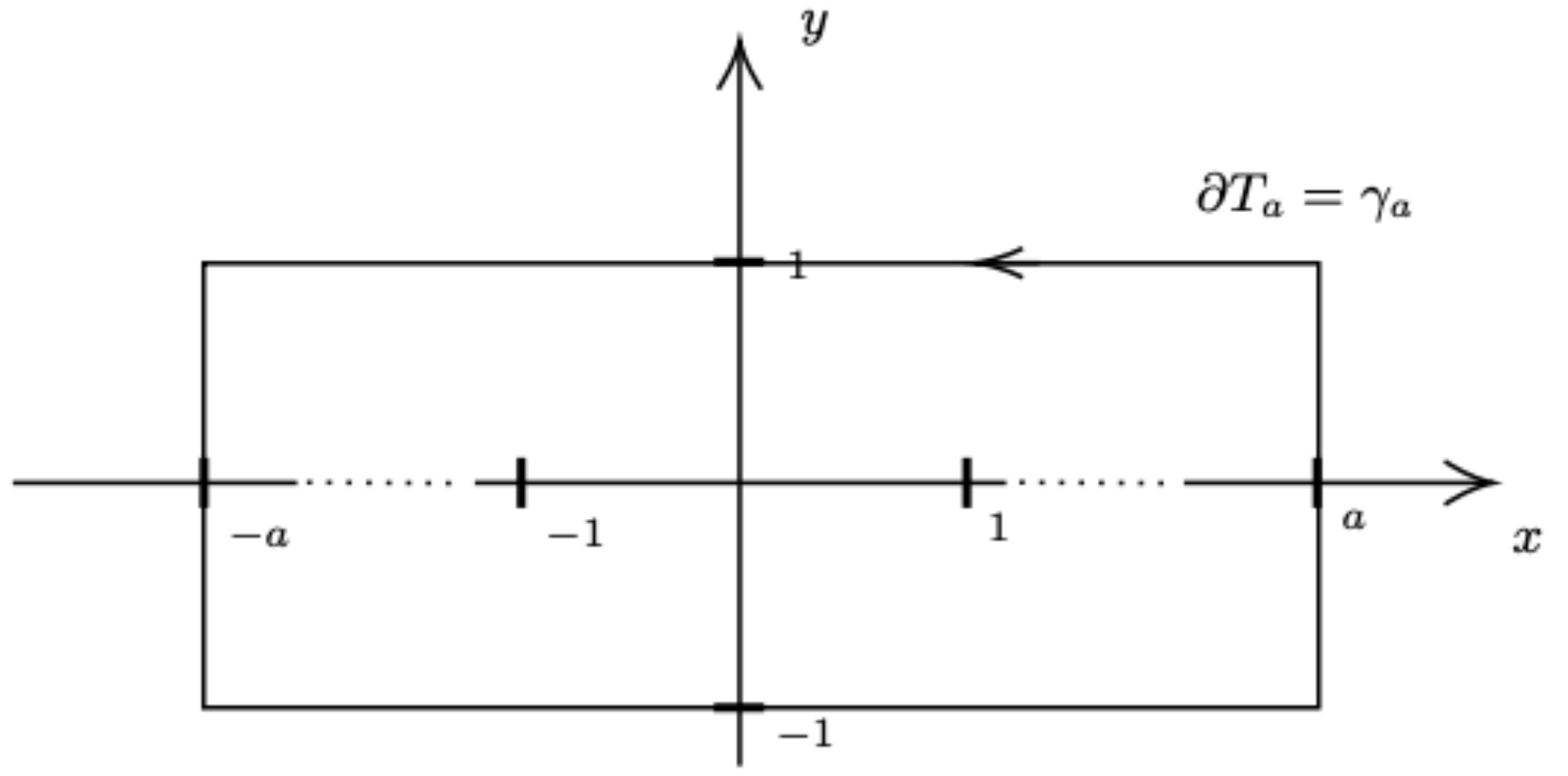
(C) $b = -1$

(D) $b = -2$



Winter 2023, Aufgabe 5

5.A2 [3 Punkte] Das Vektorfeld $K_b = \begin{pmatrix} 5x + \frac{4}{b}y \\ \frac{2}{b}x - 7y \end{pmatrix}$ hängt von einem reellen $b > 0$ ab. Sei T_a das Gebiet (wie in **5.MC8** oben).



Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\oint_{\gamma_a} K_b \cdot d\gamma$ in Abhängigkeit von a und b.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 5.A2**.

Sommer 2020, Aufgabe 5

(d) Sei das Vektorfeld $K_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$K_b(x, y) = \big(8x + 2y + 4xy^2, -b(y^3 + 2y)\big)$$

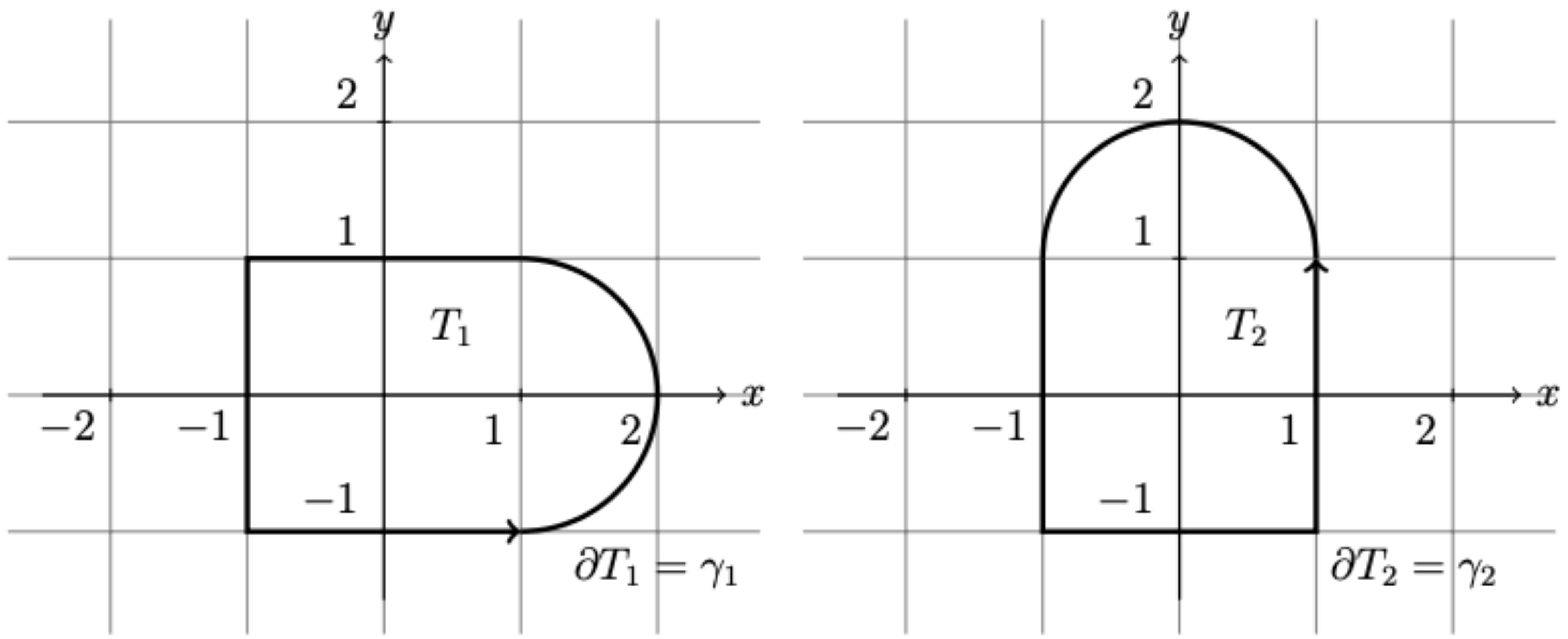
gegeben.

(i.) Berechnen Sie die Divergenz $\mathrm{div}(K_b)$ in Abhängigkeit von b:

Antwort:

$\mathrm{div}(K_b)(x, y) =$ ______________________

(ii.) Betrachten Sie die zwei Gebiete T_1 und T_2 mit Randkurven $\partial T_1 = \gamma_1$ und $\partial T_2 = \gamma_2$.



Finden Sie ein $b \in \mathbb{R}$, sodass der Fluss von innen nach aussen für beide Kurven γ_1 und γ_2 gleich ist, das heisst

$$\oint_{\gamma_1} K_b \cdot n \, ds = \oint_{\gamma_2} K_b \cdot n \, ds.$$

Dabei ist n der äussere Normaleneinheitsvektor.

Hinweis: Die Gebiete T_1 und T_2 haben den gleichen Flächeninhalt.

Bearbeiten Sie die Aufgabe auf einem separaten Blatt. Zwischenschritte werden bewertet.