

Probepfprüfung 1

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

- (a) **[1 Punkt]** Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + 2x + 1}{2x^6 + 8x + 9}.$$

- (b) **[2 Punkte]** Bestimme den Grenzwert der Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^4 - 16}.$$

Du darfst dabei die Regel von l'Hôpital **nicht** benutzen.

- (c) **[3 Punkte]** Berechne alle Fixpunkte der rekursiven Folge $x_{n+1} = f(x_n)$, wobei

$$f(x) = \frac{3}{2 + x}$$

gegeben ist.

- (d) **[3 Punkte]** Berechne die Ableitung von $e^{\sqrt{x^3}}$.

Aufgabe 2 :

Es sei die folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & x < \frac{\pi}{4} \\ ax & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) **[3 Punkte]** Wie muss a gewählt werden, sodass die Funktion stetig ist.
- (b) **[1 Punkt]** Sei nun $a = \pi$. Ist die Funktion differenzierbar?

Aufgabe 3 :

Es sei die Funktion

$$f(x) = \ln(5x^3)$$

gegeben.

- (a) **[2 Punkte]** Bestimme die Ableitung der Funktion.
- (b) **[2 Punkte]** Bestimme die Tangente am Punkt $x_0 = 1$.
- (c) **[2 Punkte]** Bestimme die zweite Ableitung der Funktion.
- (d) **[1 Punkt]** Hat die Funktion $f(x)$ ein Maximum? Begründe.
- (e) **[1 Punkt]** Ist die Funktion $f(x)$ links- oder rechtsgekrümmt?

Aufgabe 4 :

Es sei die Reproduktionsfunktion $x_{n+1} = f(x_n)$ gegeben mit

$$f(x) = \frac{x+2}{x}$$

- (a) **[2 Punkte]** Bestimme alle Fixpunkte.
- (b) **[2 Punkte]** Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x)$.
- (c) **[2 Punkte]** Welche der Fixpunkte sind auch Grenzwerte der rekursiven Folge, wenn wir einen Startwert nahe der Fixpunkte wählen?